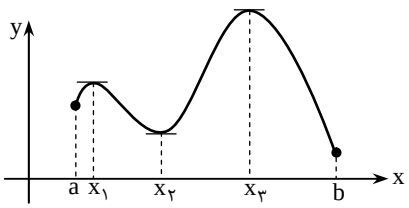
WWW.RIAZISARA.IR

۵-۶: اکسترمم‌های نسبی

در بخش قبل با نقاط اکسترمم مطلق در یک تابع و روش به‌دست آوردن آن‌ها آشنا شدیم. در این بخش به اکسترمم‌های نسبی می‌پردازیم.



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ رسم شده است. در نقطه‌ی $x=x_3$ تابع ماکزیمم مطلق و در $x=b$ می‌نیمم مطلق دارد. در نقطه‌ی $x=x_1$ تابع ماکزیمم مطلق ندارد، اما می‌توانیم یک همسایگی x_1 را درنظر بگیریم که مقدار تابع در $x=x_1$ بیش‌ترین مقدار تابع در آن همسایگی باشد (در اطراف $x=x_1$ نمودار تابع به شکل است). به $x=x_1$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f می‌گویند.

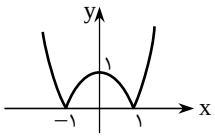
به بیان دیگر با آن‌که تابع در $x=x_1$ ماکزیمم مطلق ندارد، ولی می‌توانید بازه‌ی کوچکی شامل x_1 را درنظر بگیرید که تابع بر آن بازه در $x=x_1$ ماکزیمم مطلق داشته باشد. به همین ترتیب نقطه‌ی $x=x_2$ با آن که نقطه‌ی می‌نیمم مطلق تابع نیست، ولی تابع در $x=x_2$ می‌نیمم نسبی دارد.

تعریف اکسترمم‌های نسبی:

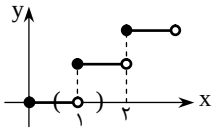
۱- تابع f در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم: $f(x)\le f(c)$.

۲- تابع f در $x=c$ می‌نیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم: $f(x)\ge f(c)$.

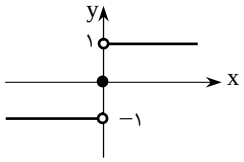
➢ **تذکر:** در حالت (۱) می‌توانیم بگوییم: «نقطه‌ی $x=c$، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی f است»، و در حالت (۲): «نقطه‌ی $x=c$، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی f است».



مثال: ۱- تابع $f(x)=|x^2-1|$ در نقاط $x=\pm1$ می‌نیمم نسبی و در نقطه‌ی $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد. زیرا در اطراف نقاط $x=1$ و $x=-1$ مقدار تابع از $f(-1)=f(1)=0$ بیش‌تر است. همچنین در اطراف $x=0$ مقدار تابع از $f(0)=1$ کم‌تر است. نقاط $x=\pm1$، نقاط می‌نیمم مطلق تابع f نیز هستند، ولی نقطه‌ی $x=0$، نقطه‌ی ماکزیمم مطلق نیست.



۲- تابع $f(x)=[x]$ در $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. در یک همسایگی کوچک $x=1$ (که در شکل با پرانتز مشخص شده) داریم: $f(x)\le f(1)$. (در واقع در این بازه $f(x)=0$ یا $f(x)=1$ که در هر حال $f(x)\le f(1)$). در حالت کلی می‌توانیم بگوییم این تابع در هر نقطه‌ی $x=n$ (که $n\in Z$) ماکزیمم نسبی دارد.



۳- تابع $f(x)=\text{sgn}(x)$ در $x=0$ نه ماکزیمم نسبی دارد، نه می‌نیمم نسبی. زیرا هر بازه‌ای شامل $x=0$ (مانند (a,b)) در نظر بگیریم، در بخشی از این بازه (یعنی $(0,b)$) داریم: $f(x)>f(0)$ و در بخشی از این بازه (یعنی $(a,0)$) داریم: $f(x)<f(0)$.

۴- اگر تابع f در بازه‌ی (a,b) ثابت باشد، در این بازه هر نقطه هم نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است و هم نقطه‌ی می‌نیمم نسبی.

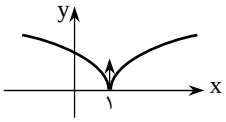
پرسش: آیا نقاط $x=a$ و $x=b$ در بازه‌ی $[a,b]$ برای تابع f می‌توانند اکسترمم نسبی باشند؟

پاسخ: خیر. شرط آن که نقطه‌ی c برای تابع f می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی باشد، آن است که در یک همسایگی شامل c، مقدار $f(c)$ کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار باشد. به همین دلیل باید یک همسایگی شامل $x=c$ در دامنه‌ی تابع موجود باشد. پس $x=a$ و $x=b$ نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند، زیرا هیچ همسایگی شامل آن‌ها در بازه‌ی $[a,b]$ قرار ندارد.

نکته: **اگر دامنه‌ی تابع f شامل حداقل یک همسایگی نقطه‌ی $x=c$ نباشد، نقطه‌ی $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست.**

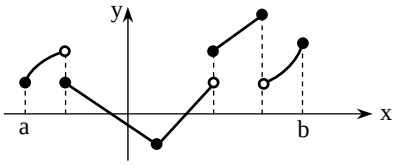
پرسش: نقطه‌ی $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f است. آیا $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیز هست؟

پاسخ: نه لزوماً! اگر حداقل یک همسایگی نقطه‌ی $x=c$ در دامنه‌ی تابع باشد، آن‌گاه اکسترمم نسبی نیز هست.



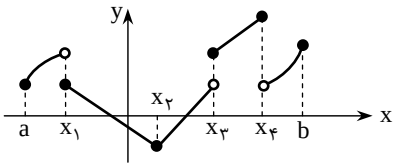
به طور مثال تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در نظر بگیرید. اگر تابع را در R در نظر بگیریم، نقطه‌ی $x=1$ هم می‌نیمم نسبی و هم می‌نیمم مطلق است. اگر تابع را در بازه‌ی $[1,+\infty)$ در نظر بگیریم، نقطه‌ی $x=1$ فقط می‌نیمم مطلق است.

تست (۱): شکل مقابل نمودار تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

حل: از ۶ نقطه‌ی بحرانی موجود (نقاط a، b و x_1 تا x_4)، نقطه‌ی $x=x_2$، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است و نقطه‌ی $x=x_4$، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی. بقیه‌ی نقاط بحرانی نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیستند.

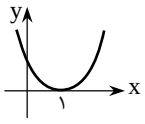


پس گزینه‌ی (۲) درست است.

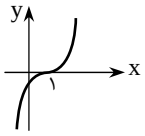
کاربرد مشتق در تعیین نقاط اکسترمم نسبی

همانند نقاط اکسترمم مطلق، در تعیین نقاط اکسترمم نسبی نیز با نقاط بحرانی تابع سر و کار داریم. در واقع اساس کار بر قضیه‌ی زیر استوار است که با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین قابل اثبات است:

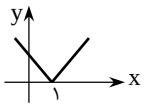
قضیه: **اگر تابع f در نقطه‌ی $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$.**



مثال: ۱- تابع $f(x)=(x-1)^2$ در $x=1$ می‌نیمم نسبی دارد، و داریم: $f'(1)=2(1-1)=0$



۲- تابع $f(x)=(x-1)^3$ در $x=1$ اکسترمم نسبی ندارد، ولی $f'(1)=0$. پس اگر $f'(c)=0$، آن‌گاه لزوماً با اکسترمم نسبی مواجه نیستیم.



۳- تابع $f(x)=|x-1|$ در $x=1$ می‌نیمم نسبی دارد، ولی $f'(1)$ وجود ندارد. پس تنها در صورتی $f'(c)=0$ که تابع در $x=c$ مشتق‌پذیر باشد.

بر اساس قضیه‌ی بالا نقاط اکسترمم نسبی تنها در دو حالت می‌توانند رخ دهند: ۱- تابع f در $x=c$ مشتقی برابر صفر داشته باشد. ۲- تابع f در $x=c$ مشتق‌پذیر نباشد.

به بیان دیگر تابع f در $x=c$ نقطه‌ی بحرانی داشته باشد.

نکته: **هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، یک نقطه‌ی بحرانی است، ولی هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً یک نقطه‌ی اکسترمم نیست.**

یک بار دیگر مثال‌های قبل را مرور کنید!

حال به مفهوم نقاط اکسترمم نسبی دقت کنید. اگر تابع در همسایگی چپ $x=c$ صعودی و در همسایگی راست آن نزولی باشد، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ مطابق جدول روبه‌رو در $x=c$ به بیش‌ترین مقدار تابع در همسایگی $x=c$ می‌رسیم، پس با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم. بر این اساس قضیه‌ی صفحه بعد قابل بیان است.

x		c	
y′	+		−
y	↗	max	↘

x		c	
y′	−		+
y	↘	min	↗

قضیه: **آزمون مشتق اول در تعیین نقاط اکسترمم نسبی**

فرض کنید تابع f در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد، $c\in(a,b)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و در تمام نقاط دیگر بازه f مشتق‌پذیر باشد:

۱- اگر در همسایگی چپ c، $f'(x)\ge ۰$ و در همسایگی راست آن $f'(x)\le ۰$، $x=c$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است.

۲- اگر در همسایگی چپ c، $f'(x)\le ۰$ و در همسایگی راست آن $f'(x)\ge ۰$، $x=c$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع f است.

طبق قضیه‌ی بالا روش زیر را می‌توانیم برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته پیشنهاد کنیم:

۱- مشتق تابع را به دست آورید و آن را تعیین علامت کنید (تشکیل جدول تغییرات).

۲- در نقاطی که علامت مشتق تغییر می‌کند با اکسترمم نسبی مواجه‌ایم (از مثبت به منفی با ماکزیمم نسبی، و از منفی به مثبت با می‌نیمم نسبی).

مسأله‌ی (۱): نقاط اکسترمم نسبی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+x+۱}$ **ب)** $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}$

حل: الف) می‌دانیم $D_f=R$. جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲+x+۱)-(۲x+۱)(x^۲-۱)}{(x^۲+x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۴x+۱}{(x^۲+x+۱)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x_۱=-۲-\sqrt{۳}\ ,\ x_۲=-۲+\sqrt{۳}$$

تابع در $x=x_۱$ ماکزیمم نسبی و در $x=x_۲$ می‌نیمم نسبی دارد.

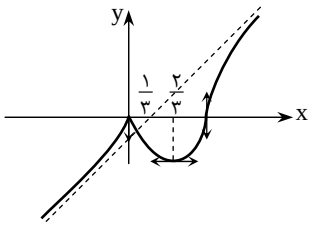
x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

ب) این بار هم $D_f=R$. حال داریم:

$$f'(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-x^۲)^۲}}=\frac{x(۳x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x^۴(x-۱)^۲}}\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}}x_۱=۰\ ,\ x_۲=\frac{۲}{۳}\ ,\ x_۳=۱$$

در دو نقطه‌ی بحرانی $x=۰$ و $x=۱$ تابع مشتق‌ناپذیر است و در $x=\frac{۲}{۳}$ مشتقی برابر صفر دارد. طبق جدول تغییرات در $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در $x=\frac{۲}{۳}$ می‌نیمم نسبی داریم. در $x=۱$ چون علامت مشتق تغییری نمی‌کند، اکسترمم نسبی نداریم. به نمودار تابع نیز دقت کنید.

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	



تست (۲): نقاط $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ به ترتیب در تابع $f(x)=\sin^۲x-\sin x$ چه نوع نقاطی هستند؟

۱) می‌نیمم نسبی- ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی- می‌نیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی- می‌نیمم نسبی ٤) ماکزیمم نسبی- ماکزیمم نسبی

حل: جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم (در یک بازه شامل دو نقطه‌ی موردنظر، مثلاً $[۰,\pi]$):

$$f'(x)=۲\sin x\cos x-\cos x=\cos x(۲\sin x-۱)\xrightarrow{f'(x)=۰}\cos x=۰\ \text{یا}\ \sin x=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{x\in[۰,\pi]}x_۱=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x_۲=\frac{\pi}{۲}\ ,\ x_۳=\frac{۵\pi}{۶}$$

از این که $f'(۰)<۰$، جدول تغییرات تابع مانند شکل مقابل می‌شود. پس هر دو نقطه‌ی موردنظر می‌نیمم نسبی هستند. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۶}$		π
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

تست (۳): مقدار می‌نیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

حل: هرچند تابع f در این بازه پیوسته نیست (مخرج کسر ریشه دارد)، ولی روش حل زیاد فرق ندارد. بازهم جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{-\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(-\sin x+1)^2}\times\cos x\xrightarrow{f'(x)=0}\cos x=0\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x_1=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_2=\frac{3\pi}{2}$$

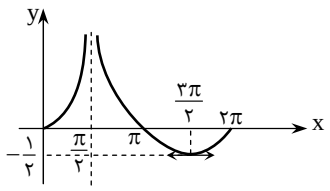
نقطه‌ی $x=\frac{3\pi}{2}$ نقطه‌ی بحرانی است و نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ در دامنه‌ی تابع نیست.

بنابراین جدول تغییرات تابع به صورت مقابل می‌شود و در $x=\frac{3\pi}{2}$ می‌نیمم نسبی داریم. مقدار این می‌نیمم نسبی برابر است با: $f(\frac{3\pi}{2})=\frac{-1}{1-(-1)}=\frac{-1}{2}$

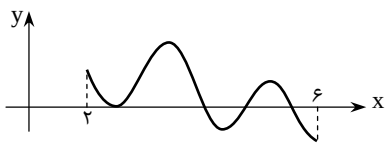
x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘	min	↗	

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

➢ **تذکر:** نمودار تابع نیز در شکل مقابل رسم شده است.

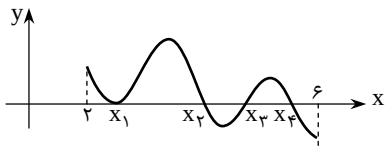


تست (۴): نمودار f'، مشتق تابع f در بازه‌ی $(2,6)$ به صورت مقابل است.
تابع f در این بازه چند ماکزیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟



۱) ۳ ماکزیمم و ۱ می‌نیمم ۲) ۲ ماکزیمم و ۲ می‌نیمم
۳) ۲ ماکزیمم و ۱ می‌نیمم ۴) ۲ می‌نیمم و ۱ ماکزیمم

حل: تابع در تمام نقاط بازه‌ی $(2,6)$ مشتق‌پذیر و پیوسته است. در ۴ نقطه‌ی x_1، x_2، x_3 و x_4 مشتق تابع صفر می‌شود و با نقطه‌ی بحرانی مواجه‌ایم. در همسایگی سه نقطه‌ی x_2، x_3 و x_4 علامت مشتق نیز تغییر می‌کند و با اکسترمم نسبی مواجه‌ایم. در واقع جدول تغییرات روبه‌رو قابل تشکیل است که طبق آن دو ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی داریم.



بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

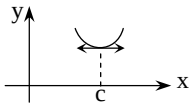
x	2		x_1		x_2		x_3		x_4		6
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗	max	↘	min	↗	max	↘	

آزمون مشتق دوم در تعیین نقاط اکسترمم نسبی

گاهی تعیین علامت مشتق تابع در همسایگی نقطه‌ی بحرانی $x=c$ مشکل است و با آزمون مشتق اول به سادگی نمی‌توانیم می‌نیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی را تشخیص دهیم. در این مواقع استفاده از آزمون مشتق دوم مفید است.

قضیه:
آزمون مشتق دوم در تعیین نقاط اکسترمم نسبی
فرض کنید تابع f در $x=c$ پیوسته باشد و $f'(c)$ و $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت:
۱- اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$، آن‌گاه $x=c$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.
۲- اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$، آن‌گاه $x=c$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

برای درک قضیه‌ی بالا دقت کنید که علامت $f''(x)$ جهت تقعر نمودار تابع را مشخص می‌کند.
وقتی $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$، در نقطه‌ی $x=c$ تابع خط مماس افقی و تقعر روبه‌بالا دارد. یعنی با شکلی شبیه شکل روبه‌رو مواجه‌ایم که نقطه‌ی می‌نیمم نسبی را نشان می‌دهد. به همین ترتیب وقتی $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$، شکل نمودار تابع در همسایگی این نقطه مانند ⌒ می‌شود که ماکزیمم نسبی را نشان می‌دهد.



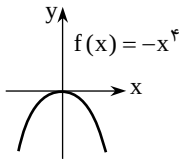
مثال: در تابع $f(x)=\tan x+\cot x$، نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است. زیرا:

$$f'(x)=۱+\tan^۲ x-۱-\cot^۲ x=\tan^۲ x-\cot^۲ x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=۱-۱=۰$$

$$f''(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)+۲\cot x(۱+\cot^۲ x) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{۴})>۰$$

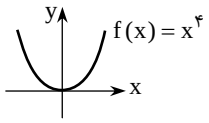
پرسش: برای تابع f در نقطه‌ی $x=c$ می‌دانیم $f'(c)=f''(c)=۰$. چه نتیجه‌ای درباره‌ی اکسترمم نسبی بودن $x=c$ می‌توانیم بیان کنیم؟

پاسخ: هیچ حکمی نمی‌توانیم بیان کنیم. ممکن است $x=c$ ماکزیمم نسبی باشد، ممکن است می‌نیمم نسبی باشد و یا ممکن است اصلاً اکسترمم نسبی نباشد. به سه مثال روبه‌رو دقت کنید:



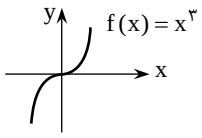
$f'(۰)=f''(۰)=۰$

$x=۰$ ماکزیمم نسبی است.



$f'(۰)=f''(۰)=۰$

$x=۰$ می‌نیمم نسبی است.



$f'(۰)=f''(۰)=۰$

$x=۰$ اکسترمم نسبی نیست.

کاربرد آزمون دوم مشتق در تعیین نقاط اکسترمم نسبی بسیار محدودتر از آزمون اول مشتق است و سعی کنید تا حد امکان از افتادن به دام مشتق‌گیری مجدد و طولانی شدن راه‌حل خودداری کنید.

روش‌هایی دیگر در تعیین نقاط اکسترمم

در پایان این بخش برخی از روش‌های دیگر را مرور می‌کنیم که در حل تست‌ها بسیار مفید هستند.

۱- رسم نمودار تقریبی

گاهی اوقات رسم نمودار تقریبی یک تابع در تشخیص تعداد نقاط اکسترمم نسبی و وجود یا عدم وجود آن‌ها بسیار سریع‌تر و مناسب‌تر از تشکیل جدول تغییرات تابع است. البته برای کسب مهارت کافی در این روش بهتر است ابتدا بخش «رسم نمودار» را مطالعه کنید.

تست (۵): تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۱|}{x+۲}$ به ترتیب چند ماکزیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) ۱-۱ **۲)** ۲-۲ **۳)** ۱-۳ **۴)** ۲-۱

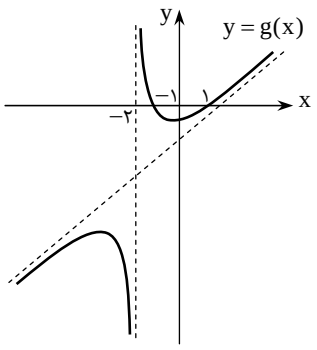
حل: راه اول: اگر قرار دهیم $g(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۲}$ داریم: $f(x)=\begin{cases} g(x) & |x|\geq ۱ \\ -g(x) & |x|<۱ \end{cases}$. حال جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

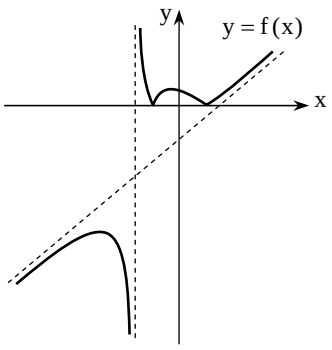
$$g'(x)=\frac{۲x(x+۲)-(x^۲-۱)}{(x+۲)^۲}=\frac{x^۲+۴x+۱}{(x+۲)^۲}\xrightarrow{g'(x)=۰} x_۱=-۲-\sqrt{۳}\ ,\ x_۲=-۲+\sqrt{۳}$$

x	$-\infty$		$-۲-\sqrt{۳}$		-۲		-۱		$-۲+\sqrt{۳}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	‖	−	‖	+	۰	−	‖	+	
$f(x)$		↗	max	↘	‖	↘	min	↗	max	↘	min	↗	

تابع دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد. اگر تشکیل جدول بالا برایتان مشکل است، ابتدا جدول تعیین علامت $g'(x)$ را تشکیل دهید و دقت کنید که برای $x>۱$ و $x<-۱$ علامت f' مانند علامت g' است. برای $-۱<x<۱$ علامت f' برعکس علامت g' است.

راه دوم: نمودار تقریبی تابع را رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار g را رسم می‌کنیم. تابع g یک تابع درجه‌ی ۲ به درجه‌ی ۱ است که مجانب قائم $x=-۲$ و مجانب مایل $y=x-۲$ (با تقسیم صورت بر مخرج) را دارد. همچنین دو ریشه‌ی $x=\pm ۱$ را دارد. پس نمودار آن شبیه شکل روبه‌رو می‌شود. چون در محدوده‌ی $-۱<x<۱$ داریم: $f(x)=-g(x)$، باید در این محدوده نمودار تابع را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f مانند شکل بعدی خواهد شد که دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد. گزینه‌ی ۲ درست است.





۲– تحلیل رفتار تابع در همسایگی نقطه (آنالیز نقطه‌ای)

گاهی به راحتی می‌توان رفتار یک تابع را در همسایگی یک نقطه (بدون تشکیل مشتق) بررسی کرد. می‌دانیم اکسترمم‌های نسبی نیز تنها به رفتار تابع در همسایگی نقطه ربط دارند. به همین دلیل این روش در بعضی از مسائل کاربرد زیادی دارد. برای درک بهتر این روش باید ابتدا بخش «آنالیز نقطه‌ای» (بخش ۵–۸) را مطالعه کنید. ما نیز تست‌های مربوط به این روش را در آن بخش ذکر کرده‌ایم. تنها به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید:

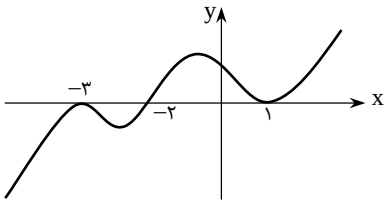
مثال: در تابع $f(x)=(x-1)^2(x+3)^4(x+2)$، نقطه‌ی $x=1$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی و نقطه‌ی $x=-3$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

برای دلیل به جدول تعیین علامت زیر دقت کنید:

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

از جدول مشخص است که در همسایگی محذوف $x=1$ داریم: $f(x)>0$ و چون $f(1)=0$ با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم. همچنین در همسایگی محذوف $x=-3$ داریم: $f(x)<0$ و چون $f(-3)=0$ با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

این امر از نمودار تابع نیز آشکار است:



دقت کنید که نمودار را با توجه به دو نتیجه‌ی زیر رسم کرده‌ایم:

۱– $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

۲– تابع ریشه‌های $x=1$، $x=-2$ و $x=-3$ را دارد که در دو ریشه‌ی مکرر $x=1$ و $x=-3$ نمودار تابع بر محور xها مماس است.

۳– استفاده از خط افقی مماس بر نمودار

طبق قضیه وقتی تابع f در $x=c$ اکسترمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، قطعاً $f'(c)=0$. یعنی قطعاً خط مماس بر نمودار تابع افقی است.

نکته: **اگر عرض اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی $x=c$، برابر m باشد، آن‌گاه خط $y=m$ بر نمودار تابع مماس است.**

نکته‌ی بالا که در شکل مقابل نیز نشان داده شده است، روشی برای بعضی از مسائل مربوط به مقادیر اکسترمم‌های نسبی در اختیار ما می‌گذارد. از بخش خط مماس می‌دانیم که شرط مماس بودن خط $y=m$ بر منحنی تابع $y=f(x)$ این است که معادله‌ی $f(x)-m=0$ ریشه‌ی مکرر داشته باشد. توجه به این نکته حل بعضی از مسائل را بسیار ساده می‌کند.

تست (۶): **مجموع مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی در تابع $f(x)=\dfrac{x^2+4ax-5}{2x+3}$ برابر ۲ است. مقدار a کدام است؟**

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

حل: اگر از روش معمول پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی با مشتق عمل کنیم به راهی طولانی و طاقت‌فرسا برمی‌خوریم. ولی با استفاده از نکته‌ی بالا مسأله به راحتی قابل حل است. فرض کنید عرض یک اکسترمم نسبی برابر m باشد، در این صورت معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$m=\frac{x^2+4ax-5}{2x+3}\Rightarrow x^2+(4a-2m)x-(5+3m)=0\xrightarrow{\Delta=0}4(2a-m)^2+4(5+3m)=0$$

$$\Rightarrow m^2+(3-4a)m+(4a^2+5)=0$$

به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ رسیده‌ایم که اگر دو ریشه‌ی آن را m_1 و m_2 بنامیم، این دو همان عرض دو نقطه‌ی ماکزیمم و می‌نیمم نسبی هستند. طبق فرض سؤال باید $m_1+m_2=2$، ولی طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $m_1+m_2=-(3-4a)$، بنابراین:

$$4a-3=2\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

۴- استفاده از هوپیتال تابع

فرض کنید ضابطه‌ی تابع f به‌صورت کسری (یعنی $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$) باشد، و در نقطه‌ی $x=c$ از دامنه‌ی تابع داشته باشیم: $f'(c)=0$ (و $h'(c)\neq 0$). در این صورت:

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{(h(x))^2}\xrightarrow{f'(c)=0}g'(c)h(c)=h'(c)g(c)\Rightarrow\frac{g(c)}{h(c)}=\frac{g'(c)}{h'(c)}$$

از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم اگر داشته باشیم $f(c)=k$، آن‌گاه هم $\frac{g(c)}{h(c)}=k$ و هم $\frac{g'(c)}{h'(c)}=k$. به زبان غیر علمی به $\frac{g'(x)}{h'(x)}$ هوپیتال تابع $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ می‌گویند. بنابراین نکته‌ی زیر از بحث بالا قابل بیان است:

نکته: **اگر $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ در نقطه‌ی $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد، مشتق‌پذیر باشد و $h'(c)\neq 0$، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی اکسترمم نسبی نمودار تابع هم در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند، هم در هوپیتال تابع.**

مثال: در تابع $f(x)=\frac{x}{2x^2-5x+2}$ نقطه‌ی $x=1$، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است. چون $f(1)=-1$، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم نسبی $(1,-1)$ است. حال داریم:

$-1=\frac{1}{2\times1-5\times1+2}\rightarrow$ مختصات نقطه در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند

هوپیتال تابع : $y=\frac{1}{4x-5}\rightarrow -1=\frac{1}{4\times1-5}\rightarrow$ مختصات نقطه در هوپیتال تابع صدق می‌کند

➢ **تذکر:** نکته‌ی بالا را می‌توانیم برای هر نقطه‌ای استفاده کنیم که $f'(c)=0$. ولی موارد استفاده‌ی آن بیش‌تر در اکسترمم‌های نسبی است.

تست (۷): **اگر نقطه‌ی $A(2,3)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی نمودار تابع $y=\frac{x^3+a}{(x+b)^2}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۸ ۴) ۸-

حل: باید مختصات نقطه هم در ضابطه‌ی تابع صدق کند و هم در هوپیتال تابع.

ضابطه‌ی تابع : $y=\frac{x^3+a}{(x+b)^2}\xrightarrow{A(2,3)}3=\frac{8+a}{(2+b)^2}\Rightarrow 3(2+b)^2=8+a$

هوپیتال تابع : $y=\frac{3x^2}{2(x+b)}\xrightarrow{A(2,3)}3=\frac{3\times4}{2(2+b)}\Rightarrow 2+b=2\Rightarrow b=0$

پس $b=0$ و با جایگذاری آن در معادله‌ی اول داریم: $12=8+a\Rightarrow a=4$. بنابراین $a+b=4$ و گزینه‌ی (۱) درست است.

WWW.RIAZISARA.IR

WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۵

اکسترمم‌های نسبی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

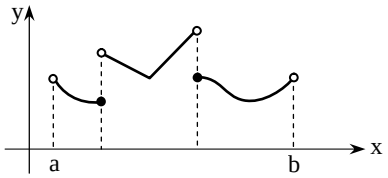
۱- **اگر تابع f در نقطه‌ی $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟**

۱) $f'(c)=0$
۲) در $x=c$ پیوسته است.
۳) در همسایگی $x=c$ تعریف شده است.
۴) در $x=c$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲- **تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟**

۱) هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.
۲) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، نقطه‌ی بحرانی است.
۳) در هر نقطه‌ی بحرانی، مشتق تابع صفر است.
۴) در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

۳- **نمودار تابع f در بازه‌ی (a,b) در شکل مقابل رسم شده است. تعداد نقاط بحرانی و تعداد نقاط اکسترمم نسبی f در این بازه به ترتیب کدام است؟**



۱) ۴ نقطه‌ی بحرانی و ۳ نقطه‌ی اکسترمم نسبی
۲) ۵ نقطه‌ی بحرانی و ۳ نقطه‌ی اکسترمم نسبی
۳) ۵ نقطه‌ی بحرانی و ۴ نقطه‌ی اکسترمم نسبی
۴) ۴ نقطه‌ی بحرانی و ۴ نقطه‌ی اکسترمم نسبی

٤- **در تابع $f(x)=|\sqrt{x}-1|$ برای نقطه‌ای به طول $x=1$ کدام گزینه درست است؟**

۱) می‌نیمم نسبی است و می‌نیمم مطلق نیست.
۲) می‌نیمم مطلق است و می‌نیمم نسبی نیست.
۳) زاویه‌دار است و اکسترمم نسبی یا مطلق نیست.
۴) هم زاویه‌دار است، هم می‌نیمم نسبی و هم می‌نیمم مطلق.

۵- **برای تابع $y=|x|[x]$ نقطه‌ی $x=0$ کدام عنوان را دارد؟**

۱) می‌نیمم نسبی
۲) ماکزیمم نسبی
۳) می‌نیمم مطلق و نسبی
۴) ماکزیمم مطلق و نسبی

٦- **در کدام‌یک از توابع زیر، نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نیست؟**

۱) $f_1(x)=-|x|$
۲) $f_2(x)=[-x]$
۳) $f_3(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 0 \\ -x+1 & x>0 \end{cases}$
۴) $f_4(x)=x+|x|$

۷- **نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{2}$ برای تابع $f(x)=2^{[x]}$ چند تا از ویژگی‌های زیر را هم‌زمان دارد؟**

الف) ماکزیمم نسبی **ب) می‌نیمم نسبی** **پ) بحرانی**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۸- **در تابع $f(x)=|x-1|-|x-2|$، نقاط $x=1$ و $x=2$ به ترتیب کدام عناوین را دارند؟**

۱) ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی
۲) می‌نیمم نسبی و ماکزیمم نسبی
۳) می‌نیمم نسبی و می‌نیمم نسبی
۴) ماکزیمم نسبی و ماکزیمم نسبی

۹- **برای تابع $f(x)=\big||2-x^2|-1\big|$ کدام گزینه درست است؟**

۱) ۳ می‌نیمم نسبی و ۴ ماکزیمم نسبی دارد.
۲) ۳ می‌نیمم نسبی و ۳ ماکزیمم نسبی دارد.
۳) ۴ می‌نیمم نسبی و ۲ ماکزیمم نسبی دارد.
۴) ۴ می‌نیمم نسبی و ۳ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۰- **در تابع $f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & x\neq 0 \\ m+2 & x=0 \end{cases}$، حدود m کدام است برای آن‌که نقطه‌ای به طول $x=0$ می‌نیمم نسبی باشد، اما می‌نیمم مطلق نباشد؟**

۱) $-2<m<-1$
۲) $-2\le m\le -1$
۳) $-2\le m<-1$
۴) $-2<m\le -1$

۱۱- حدود تغییرات k چه باشد تا نقطه‌ی $x=0$ برای تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & x>0\\ k^2 & x=0\\ x^2+4 & x<0\end{cases}$ اکسترمم نسبی نباشد؟

۱) $|k|<2$ ۲) $|k|>2$ ۳) $|k|\geq 2$ ۴) $0<|k|\leq 2$

۱۲- در تابع $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-2 & x>0\\ k+1 & x=0\\ 1-|x-1| & x<0\end{cases}$، حدود k برای آن‌که $x=0$ اکسترمم نسبی نباشد کدام است؟

۱) $-2\leq k\leq -1$ ۲) $-2<k\leq -1$ ۳) $k\geq -1$ ۴) $-2\leq k<-1$

۱۳- برای تابع f می‌دانیم: $f'(x)=x^3-3x^2+2x$. تابع f چند نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و چند نقطه‌ی می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) یک ماکزیمم و دو می‌نیمم ۲) دو ماکزیمم و یک می‌نیمم ۳) دو ماکزیمم و دو می‌نیمم ۴) یک ماکزیمم و یک می‌نیمم

۱۴- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-3x+a$ برابر ۵ باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵- طول پاره‌خط واصل بین نقاط اکسترمم نسبی روی نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x^2$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{3}$

۱۶- فاصله‌ی دو خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ در نقاط اکسترمم نسبی آن چقدر است؟

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{32}{27}$ ۳) $\frac{16}{27}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۷- به ازای چند مقدار a، منحنی $y=(x-2)(x^2+ax+1)$ دارای اکسترمم نسبی روی محور طول‌ها است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸- نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ بر محور xها مماس است و نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار روی محور عرض‌ها است. دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(0,-3)$ ۲) $(3,0)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(-3,0)$

۱۹- نمودار تابع $f(x)=3x^4-24x^2+6$ از نظر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی کدام وضعیت زیر را دارد؟

۱) دو ماکزیمم، یک می‌نیمم ۲) دو می‌نیمم، یک ماکزیمم ۳) یک ماکزیمم ۴) یک می‌نیمم

۲۰- منحنی $y=(x+1)^4(x+2)^4$ چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- کدام یک از توابع زیر دارای دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است؟

۱) $y=x^4+x^2-1$ ۲) $y=-x^4-x^2$ ۳) $y=x^3-3x^2$ ۴) $y=x^4-8x^2+7$

۲۲- تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ چند نقطه‌ی ماکزیمم و می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) یک ماکزیمم و دو می‌نیمم ۲) دو ماکزیمم و یک می‌نیمم ۳) دو ماکزیمم و دو می‌نیمم ۴) سه ماکزیمم و یک می‌نیمم

* ۲۳- تابع $f(x)=(x-a_1)(a_2-x)(x-a_3)\cdots(a_{10}-x)+10$ با شرط $a_1<a_2<\cdots<a_{10}$ مفروض است. این تابع چند نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و چند نقطه‌ی می‌نیمم نسبی دارد؟

۱) ۵ ماکزیمم و ۵ می‌نیمم دارد. ۲) ۵ ماکزیمم و ۴ می‌نیمم دارد.

۳) ۴ ماکزیمم و ۵ می‌نیمم دارد. ۴) ۴ ماکزیمم و ۴ می‌نیمم دارد.

۲۴- طول ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+5)}$ کدام است؟

۱) -5 ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $-\frac{10}{3}$

۲۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3\sqrt[3]{x}}{x+2}$ مفروض است. کدام گزینه درست است؟

۱) $f'(0)=\frac{3}{2}$
۲) مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر یک است.
۳) مقدار می‌نیمم نسبی تابع برابر یک است.
۴) در بازه‌ی $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۶- نقطه‌ی می‌نیمم نسبی روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ در کدام ناحیه از صفحه‌ی مختصات قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۷- تابع $f(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x+5}$ در R:

۱) صعودی اکید است. ۲) نزولی اکید است. ۳) دارای ماکزیمم نسبی است. ۴) دارای می‌نیمم نسبی است.

۲۸- نقطه‌ی اکسترمم نسبی روی نمودار تابع $f(x)=x\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ در کدام ناحیه از دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

* **۲۹- تابع $f(x)=ax+\sqrt{1-x^2}$:**

۱) همواره دارای می‌نیمم نسبی است.
۲) همواره دارای ماکزیمم نسبی است.
۳) به ازای $a<0$ می‌نیمم نسبی دارد.
۴) به ازای $a>0$ می‌نیمم نسبی دارد.

۳۰- تابع $y=\frac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱- برای تابع $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$ کدام گزینه درست است؟

۱) فقط ماکزیمم نسبی دارد.
۲) فقط می‌نیمم نسبی دارد.
۳) هم ماکزیمم نسبی دارد و هم می‌نیمم نسبی.
۴) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۳۲- تابع $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$ در R:

۱) اکسترمم نسبی ندارد. ۲) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی دارد. ۳) فقط می‌نیمم نسبی دارد. ۴) فقط ماکزیمم نسبی دارد.

۳۳- نقطه‌ی می‌نیمم نسبی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$ در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۴- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$ بر روی R چگونه هستند؟

۱) یک نقطه‌ی می‌نیمم - یک نقطه‌ی ماکزیمم
۲) یک نقطه‌ی می‌نیمم - دو نقطه‌ی ماکزیمم
۳) یک نقطه‌ی ماکزیمم - دو نقطه‌ی می‌نیمم
۴) فقط یک نقطه‌ی می‌نیمم

۳۵- به ازای کدام مقدار a، منحنی $y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+a}$ اکسترمم <u>ندارد</u>؟

۱) $a=1$ ۲) $a\le 1$ ۳) $a\ge 1$ ۴) $-1\le a\le 1$

۳۶- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+x+1}$ برابر ۲ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷- در تابع $f(x)=\frac{x^3+a}{(b+1)x^2-b}$، نقطه‌ی $M(2,3)$ می‌نیمم نسبی نمودار تابع است. مقادیر a و b کدام‌اند؟

۱) $a=4$ ، $b=0$ ۲) $a=-4$ ، $b=0$ ۳) $a=2$ ، $b=1$ ۴) $a=-2$ ، $b=-1$

۳۸- اگر مقدار می‌نیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+1}$ برابر ۴ باشد، مقدار ماکزیمم نسبی آن چقدر از می‌نیمم نسبی آن بیش‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۸ ۴) ۸-

۳۹- اگر $A(1,0)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$ باشد، مختصات نقطه‌ی می‌نیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $(2,4)$ ۲) $(3,4)$ ۳) $(4,6)$ ۴) $(3,2)$

۴۰- حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۴۱- در تابع $f(x)=\frac{x^2-kx}{x-4}$، حاصل‌جمع عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع برابر ۱۰ است. k کدام است؟

۱) ۲۰- ۲) ۲۰ ۳) ۳ ۴) ۳-

* ۴۲- طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2-2x+a}{x^2+b}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+2=0$ هستند. مجموع عرض‌های این نقاط کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۶ ۳) صفر ۴) ۴

۴۳- اگر خط $y=x-2$ از نقاط اکسترمم نسبی روی نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx-1}{x-2}$ بگذرد، $a+b$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۴۴- خط $y=2x-1$ نقاط اکسترمم نسبی روی نمودار تابع $f(x)=\frac{4x^2-4x+1}{x^2+a}$ را به هم وصل می‌کند. طول این نقاط کدام است؟ $(a\neq 0,-\frac{1}{4})$

۱) ± 2 ۲) ۲- و ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ و ۲ ۴) $\frac{1}{2}$ و ۲-

* ۴۵- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^2(x-1)^3}{x^2(x-2)}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=a\sin x+b\sin 2x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ برابر $2\sqrt{3}$ است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

۴۷- در تابع $f(x)=\sin^2 x+\cos x$ کدام گزینه طول اکسترمم نسبی تابع <u>نیست</u>؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) π ۳) $\frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۴۸- اگر تابع $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x+a$ در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ اکسترمم نسبی برابر $\frac{5}{2}$ داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۴۹- طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4}$

۵۰- مقدار می‌نیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$ بر بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱-

۵۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos(\frac{\pi}{x})$ در بازه‌ی $(\frac{1}{10},1)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۵۲- مجموع طول اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin^2 x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چقدر است؟

۱) π ۲) 3π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

۵۳- اگر $x_0=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{a}{\sin x}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\geq 0$ ۲) $a\leq 0$ ۳) $-1<a<1$ ۴) $a>1$ یا $a<-1$

۵۴- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\cot x-\tan x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۵- نمودار تابع $f(x)=\sin x+\tan x$ در یک دوره‌ی تناوب کدام وضع را دارد؟

۱) همواره صعودی ۲) دارای یک ماکزیمم نسبی ۳) دارای دو اکسترمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم

۵۶- کدام گزینه طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\tan x+3\cot x$ است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۵۷- در نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$ مبدأ مختصات کدام یک از عناوین زیر را دارد؟

۱) فقط ماکزیمم نسبی ۲) فقط می‌نیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی و مطلق ۴) می‌نیمم نسبی و مطلق

۵۸- نقطه‌ی $(1,2)$ برای نمودار تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-4}+2$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) می‌نیمم مطلق ۲) فقط می‌نیمم نسبی ۳) ماکزیمم مطلق ۴) فقط ماکزیمم نسبی

۵۹- نقاط اکسترمم نسبی در نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-[x]}$ روی کدام یک از خطوط زیر قرار دارند؟

۱) $y=0$ ۲) $y=1$ ۳) $y=x$ ۴) $y=x+1$

۶۰- برای تابع $f(x)=\sin x-[\sin x]$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) ۵ نقطه‌ی بحرانی دارد. ۲) ماکزیمم مطلق ندارد. ۳) می‌نیمم مطلق آن صفر است. ۴) دارای ۲ اکسترمم نسبی است.

۶۱- نقطه‌ی $(1,0)$ برای تابع $f(x)=\begin{cases} x|x-1| & x\geq 0 \\ \sqrt{-x(x^2+1)} & x<0 \end{cases}$:

۱) می‌نیمم نسبی است، اما مطلق نیست. ۲) می‌نیمم مطلق است، اما نسبی نیست.

۳) نه می‌نیمم نسبی است و نه مطلق. ۴) می‌نیمم نسبی و مطلق است.

* ۶۲- نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ برای تابع $f(x)=\begin{cases} \sin x & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ چه نوع نقطه‌ای است؟

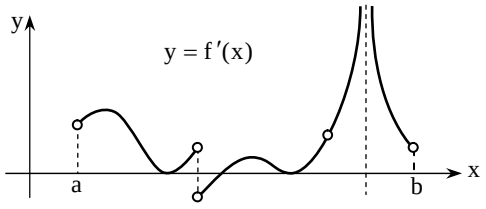
۱) ماکزیمم مطلق ۲) فقط ماکزیمم نسبی ۳) می‌نیمم مطلق ۴) فقط می‌نیمم نسبی

۶۳- تابع فرد f در بازه‌ی $(0,+\infty)$ دارای ۳ می‌نیمم نسبی و ۴ ماکزیمم نسبی است. کدام گزینه درست است؟ $(0\notin D_f)$

۱) تابع f، حداکثر ۷ می‌نیمم نسبی و حداکثر ۹ ماکزیمم نسبی دارد. ۲) تابع f، دقیقاً ۷ می‌نیمم نسبی و ۷ ماکزیمم نسبی دارد.

۳) تابع f، حداقل ۷ می‌نیمم نسبی و حداقل ۹ ماکزیمم نسبی دارد. ۴) تابع f، دقیقاً ۶ می‌نیمم نسبی و ۶ ماکزیمم نسبی دارد.

۶۴- نمودار مشتق تابع پیوسته‌ی f با دامنه‌ی (a,b) در شکل مقابل رسم شده است. تعداد اکسترمم‌های نسبی f چندتا است؟



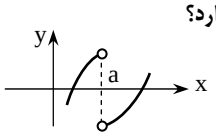
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

٦٥- اگر $f(a)=0$ ، $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ ، نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ روی آن چه وضعیتی دارد؟

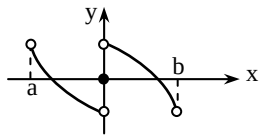
۱) ماکزیمم نسبی روی محور xها
۲) ماکزیمم نسبی روی محور yها
۳) می‌نیمم نسبی روی محور xها
۴) می‌نیمم نسبی روی محور yها

٦٦- بخشی از نمودار تابع f' در شکل مقابل رسم شده است. نقطه‌ی $x=a$ برای تابع پیوسته‌ی f در a کدام عنوان را دارد؟



۱) بازگشت و ماکزیمم نسبی
۲) بازگشت و می‌نیمم نسبی
۳) زاویه‌دار و ماکزیمم نسبی
۴) زاویه‌دار و می‌نیمم نسبی

* **٦٧- در شکل مقابل نمودار f' ، مشتق تابع پیوسته‌ی f با دامنه‌ی (a,b) رسم شده است. در این بازه f چند می‌نیمم نسبی و چند ماکزیمم نسبی دارد؟**



۱) دو ماکزیمم – یک می‌نیمم
۲) یک ماکزیمم – دو می‌نیمم
۳) اکسترمم نسبی ندارد.
۴) فرض سؤال نادرست است.

٦٨- برای توابع مشتق‌پذیر f و h در R داریم: $f'(x)=(2-x)h(x)$. اگر $h(2)=-1$ ، نقطه‌ای به طول $x=2$ برای تابع f چه وضعیتی دارد؟

۱) می‌نیمم نسبی
۲) ماکزیمم نسبی
۳) اکسترمم نسبی نیست.
۴) نمی‌توان حکم کلی بیان کرد.

٦٩- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$.
۲) اگر f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و نقطه‌ی $c\in(a,b)$ نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی f است.
۳) اگر f روی بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و مشتق f روی I صفر باشد، الزاماً f روی بازه‌ی I تابعی ثابت است.
۴) اگر تابع f روی بازه‌ی I پیوسته و f در تمام نقاط $I-\{c\}$ مشتق‌پذیر باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=L$ ، آن‌گاه $f'(c)$ وجود دارد، اما ممکن است L نباشد.

۷۰- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos^2 x-\cos x$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ چگونه‌اند؟ (سراسری - ۸۵)

۱) یک نقطه‌ی ماکسیمم – یک نقطه‌ی می‌نیمم
۲) یک نقطه‌ی ماکسیمم – دو نقطه‌ی می‌نیمم
۳) دو نقطه‌ی ماکسیمم – یک نقطه‌ی می‌نیمم
۴) دو نقطه‌ی ماکسیمم – دو نقطه‌ی می‌نیمم

۷۱- کدام بیان برای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x^2-3|$ بر دامنه‌ی $[-1,1]$ نادرست است؟ (سراسری - ۸۷)

۱) می‌نیمم مطلق دارد.
۲) ماکسیمم مطلق دارد.
۳) دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد.
۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

۷۲- اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه‌ی c، کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری - ۸۸)

۱) پیوسته
۲) مشتق‌پذیر
۳) خط مماس افقی
۴) اکسترمم نسبی

۷۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{a}{x}+bx^2$ در نقطه‌ی $(1,-2)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟(سراسری - ۸۹)

۱) $\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم
۲) $-\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم
۳) $\frac{4}{3}$ ، می‌نیمم
۴) $-\frac{4}{3}$ ، می‌نیمم

۷٤- تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده و $a<c<b$. کدام بیان نادرست است؟ (سراسری- ۹۰)

۱) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
۲) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.
۳) اگر c نقطه‌ی بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.
۴) اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

۷۵- نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos 2x-2\cos x$ روی بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۵)

۱) فاقد ماکزیمم – یک نقطه‌ی می‌نیمم
۲) یک نقطه‌ی ماکزیمم – یک نقطه‌ی می‌نیمم
۳) یک نقطه‌ی ماکزیمم – دو نقطه‌ی می‌نیمم
۴) دو نقطه‌ی ماکزیمم – یک نقطه‌ی می‌نیمم

۷۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^{۲} - ۳|$، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

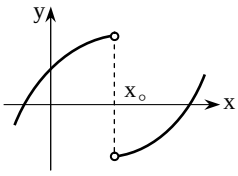
۷۷- به ازای کدام مقادیر a، تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۲} + \frac{a}{x}$، دارای ماکزیمم نسبی است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)

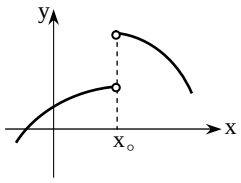
۱) $|a| > ۲$ ۲) $a < ۰$ ۳) $a > ۰$ ۴) هیچ مقدار a

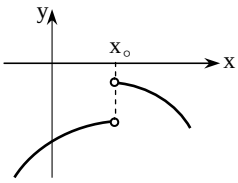
۷۸- نمودار تابع $y = \frac{۳\sin x + ۱}{۴\sin x + ۱}$ در کدام نقطه می‌نیمم نسبی دارد؟ (آزاد - ۸۵)

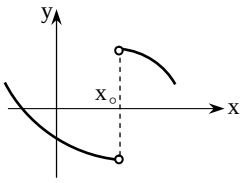
۱) صفر ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۷۹- اگر نمودار $f'(x)$ در نزدیکی $x = x_{۰}$ به صورت زیر باشد، در کدام گزینه تابع پیوسته‌ی f در $x = x_{۰}$ ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸۰- تابع $y = [۲x] - ۲x$: (آزاد - ۸۹)

۱) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.
۲) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی دارد.
۳) ماکزیمم نسبی ندارد، می‌نیمم نسبی دارد.
۴) ماکزیمم نسبی دارد، می‌نیمم نسبی ندارد.

WWW.RIAZISARA.IR

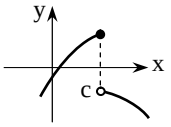
WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۵

اکسترمم‌های نسبی

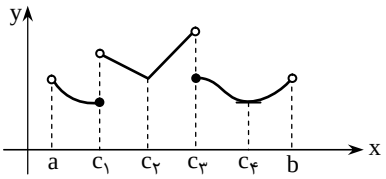
پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۳)** اولین شرط اکسترمم نسبی بودن $x = c$ آن است که تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده باشد. ولی لزومی به پیوستگی و مشتق‌پذیری در این نقطه نیست. مثلاً در شکل مقابل تابع در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد، ولی پیوسته و مشتق‌پذیر نیست.

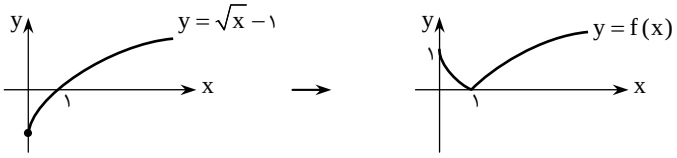


A **۲- گزینه‌ی (۲)** بیان نکات درس است. اما گزینه‌های دیگر: نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه هستند که در آن‌ها مقدار مشتق یا صفر است، یا وجود ندارد، بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرست است. هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست، مانند $x = 0$ در $f(x) = x^3$، بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است. در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، به شرط مشتق‌پذیری تابع داریم: $f'(x) = 0$، ولی اگر تابع مشتق‌پذیر نباشد گزینه‌ی (۴) درست نیست.

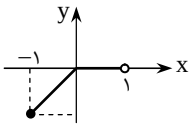
A **۳- گزینه‌ی (۱)** در شکل مقابل نقاط بحرانی را با c_1 تا c_4 نشان داده‌ایم. در نقاط c_1، c_2 و c_4 با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم. نقطه‌ی c_3 اکسترمم نسبی نیست.



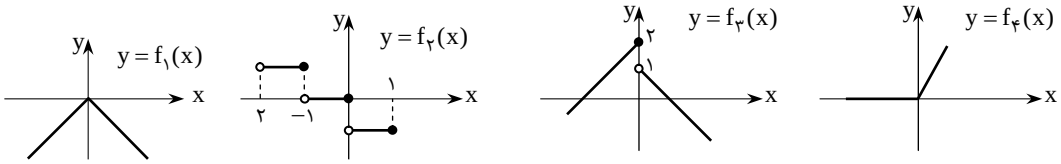
A **۴- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل نقطه‌ی $x = 1$ هم نقطه‌ی زاویه‌دار است، هم می‌نیمم نسبی و هم می‌نیمم مطلق (دقت کنید که همواره $f(x) \geq 0$ و $f(1) = 0$).



A **۵- گزینه‌ی (۲)** نمودار تابع را در همسایگی $x = 0$ رسم می‌کنیم. برای $0 \leq x < 1$ داریم: $y = 0$ و برای $-1 \leq x < 0$: $y = -|x|$. طبق نمودار $x = 0$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع است. از طرفی چون تابع برای $x \geq 1$ مقادیر مثبت اختیار می‌کند، نقطه‌ی ماکزیمم مطلق نیست.

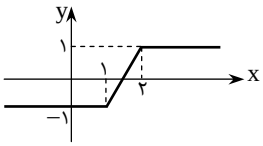


B **۶- گزینه‌ی (۴)** نمودار توابع را رسم می‌کنیم. در تابع f_4 نقطه‌ی $x = 0$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.

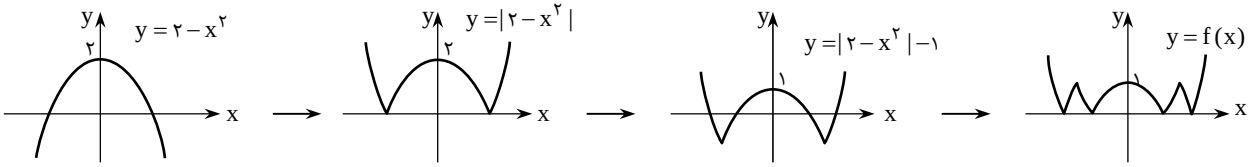


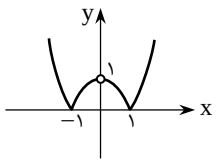
A **۷- گزینه‌ی (۳)** در محدوده‌ی $0 < x < 1$ داریم: $f(x) = 2^0 = 1$، یعنی در این محدوده با یک تابع ثابت مواجه‌ایم. بنابراین هر نقطه‌ای هم بحرانی است (زیرا $f'(x) = 0$)، هم ماکزیمم نسبی است و هم می‌نیمم نسبی.

B **۸- گزینه‌ی (۲)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم (برای یادآوری روش رسم آن به فصل ۱ مراجعه کنید). در $x = 1$ تابع می‌نیمم نسبی و در $x = 2$ ماکزیمم نسبی دارد.

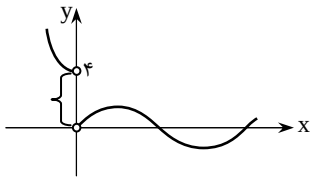


B **۹- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از نمودار مشخص است که تابع ۴ می‌نیمم نسبی و ۳ ماکزیمم نسبی دارد.



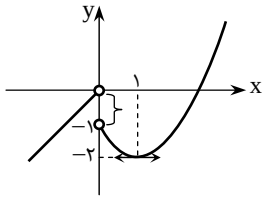


B **۱۰- گزینه‌ی (۱)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. علاوه بر شکل روبه‌رو، یک نقطه‌ی توپر نیز به عرض $m+2$ روی محور عرض‌ها داریم. برای آن‌که $x=0$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی باشد، باید این نقطه‌ی توپر زیر نقطه‌ی توخالی $(0,1)$ قرار گیرد، یعنی $m+2<1$. همچنین برای آن‌که می‌نیمم مطلق نباشد، باید بالای محور xها قرار بگیرد، یعنی $m+2>0$. بنابراین: $0<m+2<1 \Rightarrow -2<m<-1$



B **۱۱- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. علاوه بر دو منحنی رسم شده، باید یک نقطه‌ی توپر به عرض k^2 روی محور yها نیز به نمودار اضافه شود. اگر این نقطه پایین‌تر از مبدأ (یا روی آن) قرار گیرد، در نقطه‌ی $x=0$ می‌نیمم نسبی داریم. اگر این نقطه بالاتر از نقطه‌ی توخالی به عرض ۴ قرار گیرد، با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم. بنابراین برای آن‌که $x=0$، نقطه‌ی اکسترمم نسبی نباشد، باید:

$$0<k^2\le 4 \Rightarrow 0<|k|\le 2$$



B **۱۲- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم: با توجه به شکل اگر نقطه‌ی مربوط به $f(0)$ در محدوده‌ی مشخص شده (بین ۱− و صفر) قرار بگیرد، مقدار $f(0)$ از مقادیر تابع در همسایگی راست $x=0$ بزرگ‌تر و از مقادیر آن در همسایگی چپ کوچک‌تر می‌شود، پس با اکسترمم نسبی مواجه نیستیم. (همچنین اگر روی نقطه‌ی توخالی ۱− قرار بگیرد، باز چنین وضعیتی داریم). به این ترتیب باید:

$$-1\le f(0)<0 \Rightarrow -1\le k+1<0 \Rightarrow -2\le k<-1$$

A **۱۳- گزینه‌ی (۱)** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$$

طبق جدول، تابع دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

A **۱۴- گزینه‌ی (۱)** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

پس ماکزیمم نسبی تابع در $x=-1$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر است با: $f(-1)=2+a$، بنابراین: $2+a=5 \Rightarrow a=3$

B **۱۵- گزینه‌ی (۱)** دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی را با استفاده از مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)\xrightarrow{f'(x)=0} x_1=0\ ,\ x_2=2 \Rightarrow y_1=0\ ,\ y_2=4$$

پس دو نقطه $A(0,0)$ و $B(2,4)$ هستند که فاصله‌ی آن‌ها برابر است با: $\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

B **۱۶- گزینه‌ی (۲)** نقاط اکسترمم نسبی را با مشتق‌گیری پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)+(x-1)^2=(x-1)(3x+1)\xrightarrow{f'(x)=0} x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{1}{3}$$

چون $f(1)=0$ و $f(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27}$، خط‌های $y=0$ و $y=\frac{32}{27}$ در نقاط اکسترمم نسبی بر نمودار تابع مماس‌اند که فاصله‌ی آن‌ها برابر $|\frac{32}{27}-0|=\frac{32}{27}$ است.

B **۱۷- گزینه‌ی (۳)** چون عرض اکسترمم صفر است، باید معادله‌ی $y=0$ ریشه‌ی مکرر داشته باشد. برای این منظور یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱- معادله‌ی $x^2+ax+1=0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، بنابراین: $a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$

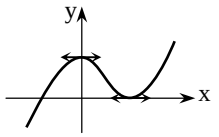
۲- $x=2$ ریشه‌ی عبارت x^2+ax+1 نیز باشد، بنابراین: $4+2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$

C **۱۸- گزینه‌ی (۴)** **راه اول:** با توجه به آن‌که تابع در $x=0$ مماس افقی دارد (نقطه‌ی اکسترمم نسبی روی محور عرض‌ها)، داریم:

$$f'(0)=0 \Rightarrow 3\times 0^2+2a\times 0+b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4 \Rightarrow f'(x)=x(3x+2a)$$

نقطه‌ی اکسترمم نسبی دوم $x=-\frac{2a}{3}$ است که برای مماس بودن نمودار بر محور xها باید:

$$f(-\frac{2a}{3})=0 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \Rightarrow 4a^3=-4\times 27 \Rightarrow a=-3$$



راه دوم: با توجه به اطلاعات مسأله نتیجه می‌گیریم نمودار تابع شبیه شکل روبه‌رو است. بنابراین طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی دوم عددی مثبت است، یعنی: $-\frac{2a}{3}>0$، پس $a<0$ و در گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (۴) این شرط را دارد.

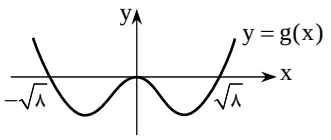
B **۱۹- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = ۱۲x^۳ - ۴۸x = ۱۲x(x^۲ - ۴) = ۱۲x(x-۲)(x+۲)$$

با توجه به جدول تغییرات، دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی داریم.

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

راه دوم: وضعیت اکسترمم‌های تابع f شبیه تابع $g(x) = ۳x^۴ - ۲۴x^۲$ است، زیرا نمودار f از انتقال عمودی نمودار g حاصل می‌شود. چون $g(x) = ۳x^۲(x^۲ - ۸)$، پس نمودار g در $x = ۰$ بر محور xها مماس است و شکلی شبیه شکل روبه‌رو دارد. دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی داریم.



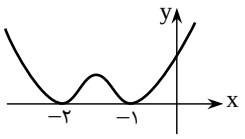
B **۲۰- گزینه‌ی (۳)** **راه اول:** از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تغییرات آن را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = ۴(x+۱)^۳(x+۲)^۴ + (x+۱)^۴ \times ۴(x+۲)^۳ = ۴(x+۱)^۳(x+۲)^۳(x+۲+x+۱) = ۴(x+۱)^۳(x+۲)^۳(۲x+۳)$$

با توجه به جدول تغییرات مشخص است که تابع دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۳}{۲}$		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

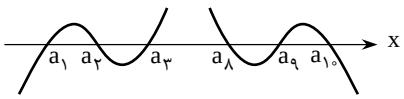
راه دوم: نمودار تقریبی تابع را رسم می‌کنیم. تابع فقط دو ریشه‌ی $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = -۲$ را دارد و در همسایگی این دو ریشه رفتار تابع مشابه $y_۱ = (x_۱+۱)^۴$ و $y_۲ = (x+۲)^۴$ است (یعنی بر محور xها مماس با تقعر روبه‌بالا). بنابراین نمودار تقریبی تابع مشابه شکل روبه‌رو می‌شود که دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.



C **۲۱- گزینه‌ی (۴)** با توجه به آن‌که همه‌ی گزینه‌ها چند جمله‌ای‌اند، برای برقراری شرط تست باید نمودار تابع شبیه باشد. بنابراین باید $\lim_{x\to\pm\infty} y = +\infty$، پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. در گزینه‌ی (۱) داریم: $y' = ۲x(۲x^۲+۱)$ و تابع فقط یک اکسترمم نسبی دارد، پس گزینه‌ی (۱) نیز رد می‌شود.

B **۲۲- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن که نمودار در نقاط $x = ۱$، $x = ۲$، $x = ۳$ و $x = ۴$ با محور xها تقاطع دارد و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$، نمودار تابع شبیه شکل مقابل می‌شود که دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

D **۲۳- گزینه‌ی(۲)** نقاط اکسترمم نسبی تابع f و تابع $g(x) = (x-a_۱)(a_۲-x)\cdots(a_{۱۰}-x)$ وضعیت مشابهی دارند، زیرا نمودار تابع g از انتقال عمودی نمودار f حاصل می‌شود. تابع g در ۱۰ نقطه با محور xها برخورد می‌کند. چون $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$ (بزرگ‌ترین درجه‌ی g، $-x^{۱۰}$ است)، نمودار تابع g شبیه شکل روبه‌رو می‌شود.



با توجه به نمودار، تابع ۹ اکسترمم نسبی دارد که ۵ تای آن‌ها ماکزیمم نسبی و ۴ تا می‌نیمم نسبی هستند.

B **۲۴- گزینه‌ی(۴)** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{۲x(x+۵)+x^۲}{۳\sqrt[۳]{x^۴(x+۵)^۲}} = \frac{x(۳x+۱۰)}{۳\sqrt[۳]{x^۴(x+۵)^۲}}$$

x	$-\infty$		-۵		$-\frac{۱۰}{۳}$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	۰	$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↗	max	↘	min	↗	

B **۲۵- گزینه‌ی(۲)** از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} \times (x+۲) - ۳\sqrt[۳]{x}}{(x+۲)^۲} = \frac{-۲(x-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}(x+۲)^۲}$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$		↗		↗		↗	max	↘	

تابع در $x = ۱$ ماکزیمم نسبی برابر $f(۱) = ۱$ دارد.

B **۲۶- گزینه‌ی (۴)** **راه اول:** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)=\frac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

بنابراین در $x=\frac{2}{5}$ می‌نیمم نسبی داریم و چون $f(\frac{2}{5})<0$، روی نمودار تابع این نقطه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

راه دوم: با استفاده از رسم تقریبی نمودار تابع: رفتار تابع در همسایگی $x=0$ مانند تابع $y=-\sqrt[3]{x^2}$ است و نمودار در $x=1$ محور xها را قطع می‌کند. پس در بازه‌ی $[0,1]$ نمودار تابع شکلی شبیه شکل روبه‌رو دارد و می‌نیمم نسبی آن در ناحیه‌ی چهارم قرار می‌گیرد.

B **۲۷- گزینه‌ی (۱)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1-\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}=1-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}\xrightarrow{f'(x)=0}x+2=\sqrt{x^2+4x+5}$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4=x^2+4x+5\Rightarrow 4=5$$

پس $f'(x)$ ریشه‌ای ندارد، و چون $f'(0)>0$، نتیجه می‌گیریم همواره $f'(x)>0$. پس تابع f در R صعودی اکید است.

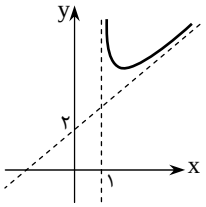
C **۲۸- گزینه‌ی (۱)** **راه اول:** $D_f=(-\infty,-3]\cup(1,+\infty)$. جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$x>1 \text{ اگر}: f'(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}+x\times\frac{-\frac{4}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}=\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}-\frac{2x}{(x-1)\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}=\frac{2x}{(x-1)\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+3}}\Rightarrow(x+3)(x-1)=2x\Rightarrow x^2-3=0\xrightarrow{x>1}x=\sqrt{3}$$

پس در نقطه‌ی $x=\sqrt{3}$ با اکسترمم نسبی تابع مواجه‌ایم که چون $f(\sqrt{3})>0$، این نقطه روی نمودار در ناحیه‌ی اول قرار دارد.

تذکر: برای $x\le-3$ نیز با جایگذاری $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=\frac{\sqrt{-(x+3)}}{\sqrt{-(x-1)}}$ و مشتق‌گیری مانند روند بالا به معادله‌ی $x^2-3=0$ خواهید رسید که برای $x\le-3$ ریشه‌ای ندارد. پس در آن محدوده اکسترمم نسبی نداریم.



راه دوم: از رسم تقریبی نمودار تابع استفاده می‌کنیم. مجانب قائم تابع $x=1$ است و چون $f(x)=x\sqrt{1+\frac{4}{x-1}}$، وقتی $x\to+\infty$ داریم: $\sqrt{1+\frac{4}{x-1}}\sim1+\frac{2}{x-1}$ و مجانب مایل تابع $y=x+2$ می‌شود. به این ترتیب نمودار تقریبی تابع در محدوده‌ی $x>1$ مانند شکل مقابل می‌شود که در ناحیه‌ی اول می‌نیمم نسبی دارد.

D **۲۹- گزینه‌ی (۲)** دامنه‌ی تابع $[-1,1]$ است. در بازه‌ی $(-1,1)$ داریم:

$$f'(x)=a+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=a-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow{f'(x)=0}a\sqrt{1-x^2}=x\Rightarrow a^2(1-x^2)=x^2\Rightarrow x^2=\frac{a^2}{a^2+1}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

اگر $a\ge0$، از تساوی $a\sqrt{1-x^2}=x$ نتیجه می‌گیریم $x\ge0$، بنابراین ریشه‌ی $x_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ قابل قبول است. اگر $a<0$ از همان تساوی نتیجه می‌گیریم $x<0$، بنابراین بازهم ریشه‌ی $x_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ قابل قبول است (در هر حالت $x=-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ غیر قابل قبول است).

چون $f'(0)=a$، جدول تغییرات تابع به یکی از دو صورت زیر می‌شود:

x	-1		0	x_0		1
$f'(x)$		$+$		0	$-$	
$f(x)$		↗		max	↘	

حالت $a>0$

x	-1		x_0	0		1
$f'(x)$		$+$	0		$-$	
$f(x)$		↗	max		↘	

حالت $a<0$

به ازای $a=0$ نیز باز هم تابع ماکزیمم نسبی خواهد داشت، یعنی همواره ماکزیمم نسبی دارد.

تذکر (۱): برای تشخیص علامت مشتق (بدون آن‌که به دو حالت مسأله را تقسیم کنید)، می‌توانستید از حدهای $\lim_{x\to1^-}f'(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$ استفاده کنید.

تذکر (۲): می‌توانستید از آزمون مشتق دوم نیز برای تشخیص ماکزیمم نسبی کمک بگیرید.

B **۳۰- گزینه‌ی(۳)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

عبارت صورت کسر $f'(x)$ دو ریشه دارد که هیچ‌کدام ریشه‌های مخرج کسر ($x=0$ و $x=2$) نیستند. بنابراین در همسایگی آن‌ها علامت f' تغییر می‌کند و با اکسترمم نسبی مواجه‌ایم.

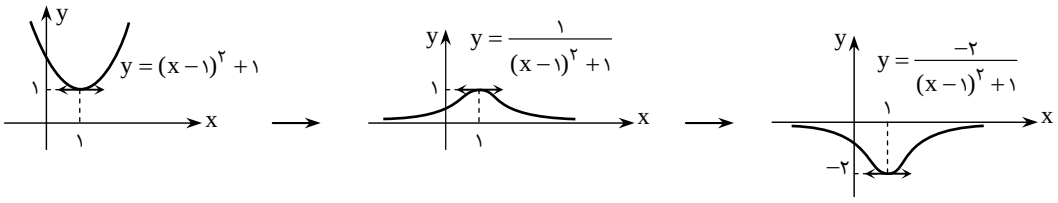
B **۳۱- گزینه‌ی (۲) راه اول:** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$f(x)=1-\frac{2}{x^2-2x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

بنابراین تابع فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.

راه دوم: نمودار تقریبی تابع را رسم می‌کنیم. داریم: $f(x)=1-\frac{2}{(x-1)^2+1}$، بنابراین وضعیت اکسترمم‌های تابع f و تابع $y=\frac{-2}{(x-1)^2+1}$ مانند هم است.



مشاهده می‌کنید که فقط یک می‌نیمم نسبی داریم.

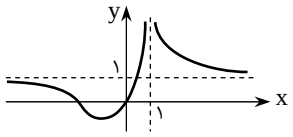
B **۳۲- گزینه‌ی(۳) راه اول:** جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\searrow$	1

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}=\frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$$

با توجه به جدول، تابع فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.

راه دوم: نمودار تابع را به صورت تقریبی رسم می‌کنیم. با توجه به ریشه‌های $x=0$ و $x=-2$ و مجانب‌های قائم و افقی $x=1$ و $y=1$، و این‌که $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$، نمودار تابع مشابه شکل مقابل می‌شود. تابع یک می‌نیمم نسبی دارد. (در رسم نمودار از این استفاده کرده‌ایم که وقتی $x\to+\infty$، داریم: $f(x)-1\to 0^+$).



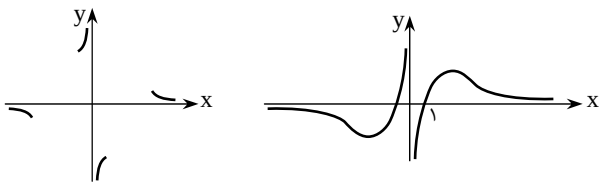
C **۳۳- گزینه‌ی (۴) راه اول:** نقطه‌ی می‌نیمم نسبی را با تشکیل جدول تغییرات می‌یابیم:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	|	$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$f'(x)=\frac{2x\times x^3-3x^2(x^2-1)}{x^6}=\frac{x^2(3-x^2)}{x^6}$$

در نقطه‌ی $x=-\sqrt{3}$ داریم: $f(-\sqrt{3})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$، پس $f(-\sqrt{3})<0$ و نقطه‌ی $(-\sqrt{3},-\frac{2}{3\sqrt{3}})$ در ناحیه‌ی چهارم است.

راه دوم: با توجه به آن‌که $x=0$ مجانب قائم و $y=0$ مجانب افقی است، و وقتی $x\to+\infty$ داریم: $y\to 0^+$ و در حالت $x\to-\infty$ داریم: $y\to 0^-$، رفتار تابع اطراف مجانب‌های قائم آن مانند شکل مقابل می‌شود. بنابراین نمودار آن شبیه شکل بعدی می‌شود که می‌نیمم نسبی آن در ناحیه‌ی چهارم است. (می‌توانید از دو ریشه‌ی $x=\pm 1$ نیز در رسم نمودار کمک بگیرید.)



C **۳۴- گزینه‌ی (۲) راه اول:** اگر قرار دهیم: $g(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$، داریم: $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq ۰ \\ -g(x) & x<۰ \end{cases}$. حال داریم:

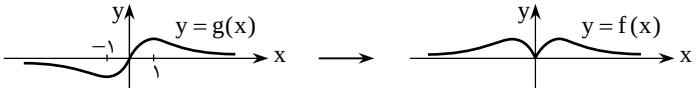
$$g'(x)=\frac{x^{۲}+۱-۲x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین با توجه به آن‌که $f'(x)=\begin{cases} g'(x) & x>۰ \\ -g'(x) & x<۰ \end{cases}$ (تابع f در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است)، جدول تغییرات تابع f به صورت زیر می‌شود. یعنی تابع f دو ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

راه دوم: با رسم نمودار تقریبی g و سپس استفاده از $f(x)=g(|x|)$، نمودار f را رسم می‌کنیم.



C **۳۵- گزینه‌ی (۱)** ریشه‌های مشتق تابع را می‌یابیم:

$$y=۱-\frac{a}{x^{۲}-۲x+a}\Rightarrow y'=\frac{a(۲x-۲)}{(x^{۲}-۲x+a)^{۲}}$$

اگر $a=۰$، تابع یک تابع ثابت است که بی‌شمار اکسترمم دارد. فرض می‌کنیم $a\neq ۰$. اگر $x=۱$ ریشه‌ی عبارت مخرج کسر نباشد، در $x=۱$ داریم $y'=۰$ و در مجاورت آن علامت y' عوض می‌شود، پس با یک اکسترمم نسبی مواجه‌ایم. بنابراین برای آن‌که تابع اکسترمم نداشته باشد، باید $x=۱$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد، یعنی: $۱-۲+a=۰\Rightarrow a=۱$

B **۳۶- گزینه‌ی (۱)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم خط $y=۲$ بر نمودار تابع مماس است، پس معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$۲=\frac{x^{۲}+a}{x^{۲}+x+۱}\Rightarrow x^{۲}+۲x+(۲-a)=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۴-۴(۲-a)=۰\Rightarrow a=۱$$

A **۳۷- گزینه‌ی (۱)** مختصات نقطه‌ی می‌نیمم نسبی هم در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند و هم در هوپیتال تابع. بنابراین:

$$۳=\frac{۸+a}{۴(b+۱)-b}\Rightarrow ۹b+۴=a \quad , \quad ۳=\frac{۳\times ۴}{(b+۱)\times ۲\times ۲}\Rightarrow b+۱=۱\Rightarrow b=۰$$

پس $b=۰$ و با جایگذاری در $۹b+۴=a$ داریم $a=۴$.

C **۳۸- گزینه‌ی (۴)** اگر m مقدار اکسترمم نسبی (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع f باشد، خط $y=m$ بر نمودار آن مماس است. پس معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$m=\frac{x^{۲}+۲x+a}{x+۱}\Rightarrow x^{۲}+(۲-m)x+(a-m)=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(۲-m)^{۲}-۴(a-m)=۰\Rightarrow m^{۲}=۴a-۴$$

معادله‌ی بالا بر حسب m دو ریشه‌ی قرینه دارد. پس اگر $m=۴$ یکی از ریشه‌های آن باشد (طبق فرض، مقدار می‌نیمم نسبی)، ریشه‌ی دیگر $m=-۴$ است (مقدار ماکزیمم نسبی) و پاسخ تست $-۴-۴=-۸$ می‌شود.

تذکر: نمودار تابع به شکل روبه‌رو است، همان‌طور که می‌بینید نقطه‌ی می‌نیمم نسبی بالاتر از ماکزیمم نسبی قرار می‌گیرد:

C **۳۹- گزینه‌ی (۲) راه اول:** نقطه‌ی $A(۱,۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار تابع است، پس مختصات این نقطه در خود تابع و هوپیتال تابع صدق می‌کند. داریم:

$$۰=\frac{۱+a+b}{۱-۲}\Rightarrow a+b=-۱ \quad , \quad ۰=\frac{۲\times ۱+a}{۱}\Rightarrow a=-۲$$

پس $a=-۲$، $b=۱$ و $f(x)=\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x-۲}$. حال با مشتق‌گیری طول نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(۲x-۲)(x-۲)-(x^{۲}-۲x+۱)}{(x-۲)^{۲}}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۲)^{۲}}\Rightarrow x=۳ \text{ می‌نیمم نسبی: } \xrightarrow{f(۳)=۴} B(۳,۴) \text{ می‌نیمم نسبی}$$

راه دوم: مانند بخش اول راه‌حل قبل به‌دست می‌آوریم: $a=-۲$ و $f(x)=\frac{x^{۲}-۲x+b}{x-۲}$. بنابراین تابع مجانب‌های $x=۲$ و $y=x$ را دارد که محل برخورد آن‌ها (یعنی $M(۲,۲)$) مرکز تقارن نمودار تابع است. نقطه‌ی می‌نیمم نسبی قرینه‌ی نقطه‌ی ماکزیمم نسبی می‌شود.

C **۴۰- گزینه‌ی(۲) راه اول:** اگر m مقدار اکسترمم تابع f باشد، خط $y=m$ بر نمودار آن مماس است. بنابراین معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$m=\frac{x^۲+۱}{x^۲+x+۱}\Rightarrow (m-۱)x^۲+mx+(m-۱)=۰\xrightarrow{\Delta=۰}m^۲-۴(m-۱)^۲=۰\Rightarrow -۳m^۲+۸m-۴=۰$$

دو ریشه‌ی معادله‌ی بالا همان مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با: $\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$.

راه دوم: با مشتق‌گیری نتیجه می‌گیریم $x=\pm ۱$ نقاط اکسترمم نسبی تابع‌اند، بنابراین عرض آن‌ها $f(۱)=\frac{۲}{۳}$ و $f(-۱)=۲$ می‌شود و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{۴}{۳}$.

تذکر: به طور کلی می‌توان ثابت کرد که در توابع درجه‌ی ۲ به درجه‌ی ۲، حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی برابر است با $\frac{\Delta\ \text{صورت}}{\Delta\ \text{مخرج}}$.

C **۴۱- گزینه‌ی (۳) راه اول:** اگر m عرض اکسترمم نسبی تابع f باشد، خط $y=m$ بر نمودار تابع مماس است. پس معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$m=\frac{x^۲-kx}{x-۴}\Rightarrow x^۲-(k+m)x+۴m=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(k+m)^۲-۱۶m=۰\Rightarrow m^۲+(۲k-۱۶)m+k^۲=۰$$

دو ریشه‌ی معادله‌ی بالا همان عرض نقاط اکسترمم نسبی هستند، پس $m_۱+m_۲=۱۰$، بنابراین: $-\frac{۲k-۱۶}{۱}=۱۰\Rightarrow k=۳$

راه دوم: با یک تابع درجه‌ی ۲ به درجه‌ی ۱ مواجه‌ایم که مرکز تقارن آن محل برخورد خطوط مجانب آن است (برای توضیح بیش‌تر به بخش «رسم نمودار» مراجعه کنید). تابع مجانب قائم $x=۴$ را دارد و با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن مجانب مایل $y=x-k+۴$ به دست می‌آید. نقطه‌ی برخورد دو مجانب $A(۴,۸-k)$ است. چون A وسط دو اکسترمم تابع است داریم:

$$\text{مجموع عرض‌های دو اکسترمم}=۲(۸-k)\Rightarrow ۲(۸-k)=۱۰\Rightarrow k=۳$$

راه سوم: می‌دانیم مرکز تقارن تابع روی مجانب قائم آن (یا همان خط $x=۴$) است. بنابراین اگر $x_۱$ و $x_۲$ طول دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع باشند، داریم: $x_۱+x_۲=۲\times ۴=۸$. حال چون نقاط اکسترمم نسبی در هوپیتال تابع صدق می‌کنند، داریم:

$$\text{هوپیتال تابع}:\ y=\frac{۲x-k}{۱}\Rightarrow y_۱+y_۲=۲x_۱-k+۲x_۲-k\xrightarrow[x_۱+x_۲=۸]{y_۱+y_۲=۱۰}۱۰=۲\times ۸-۲k\Rightarrow k=۳$$

D **۴۲- گزینه‌ی(۳)** اگر دو نقطه‌ی اکسترمم نسبی روی نمودار تابع را با $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ نشان دهیم، طبق روابط بین ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی ۲ از فرض تست داریم: $x_۱+x_۲=۴$ و $x_۱x_۲=۲$. می‌دانیم مختصات نقطه‌ی اکسترمم نسبی در هوپیتال تابع صدق می‌کند:

$$\text{هوپیتال تابع}:\ y=\frac{۲x-۲}{۲x}\Rightarrow y=۱-\frac{۱}{x}\Rightarrow y_۱+y_۲=۱-\frac{۱}{x_۱}+۱-\frac{۱}{x_۲}=۲-\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۲-\frac{۴}{۲}=۰$$

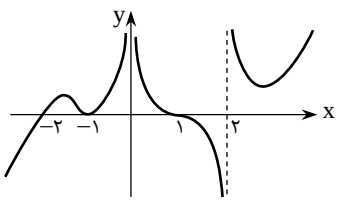
C **۴۳- گزینه‌ی (۲)** نقاط اکسترمم نسبی در هوپیتال تابع صدق می‌کنند، بنابراین در این نقاط: $y=\frac{۲ax+b}{۱}$. چون $y=۲ax+b$ یک خط را مشخص می‌کند و از دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد، این همان خط $y=x-۲$ است، بنابراین:

$$۲a=۱\ ,\ \ b=-۲\Rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲}$$

C **۴۴- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم نقاط اکسترمم تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کنند، یعنی مختصات آن‌ها در رابطه‌ی $y=\frac{۸x-۴}{۲x}$ صدق می‌کند. از طرفی این نقاط در رابطه‌ی $y=۲x-۱$ صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\frac{۸x-۴}{۲x}=۲x-۱\Rightarrow ۴x-۲=x(۲x-۱)\Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow (۲x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\ ,\ \ x_۲=۲$$

D **۴۵- گزینه‌ی (۳)** نمودار تابع را به شکل تقریبی رسم می‌کنیم. تابع دو مجانب قائم $x=۲$ و $x=۰$ را دارد.



داریم: $\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$.

همچنین در همسایگی $x=۱$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=-(x-۱)^۳$ و در همسایگی $x=-۱$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=(x+۱)^۲$ است. با توجه به آن‌که تابع به‌جز مقادیر $x=۱$، $x=-۱$ و $x=-۲$ ریشه‌ی دیگری ندارد نمودار آن تقریباً شبیه شکل رسم شده می‌شود که دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

B **۴۶- گزینه‌ی (۲)** از این که $(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار تابع f است، نتیجه می‌گیریم: $f(\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3}$ و $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = a\cos x + 2b\cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{a}{2} - \frac{2b}{2} = 0 \Rightarrow a = 2b \\ f(x) = a\sin x + b\sin 2x \Rightarrow f(\frac{\pi}{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a + b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{4}{3}, a = \frac{8}{3}$$

A **۴۷- گزینه‌ی (۴)** ریشه‌های مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) \xrightarrow{f'(x)=0} \sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

در نقاط $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$ داریم: $\cos x = \frac{1}{2}$ و در نقطه‌ی $x = \pi$ داریم: $\sin x = 0$. در همسایگی همه‌ی این نقاط علامت مشتق عوض می‌شود و با اکسترمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۴۸- گزینه‌ی (۲)** بنا بر فرض باید نمودار تابع بر خط $y = \frac{5}{2}$ مماس باشد، پس معادله‌ی زیر ریشه‌ی مکرر دارد:

$$\frac{5}{2} = \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x + a \Rightarrow 1 - \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + a - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow -\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + (a - \frac{3}{2}) = 0$$

معادله‌ی بالا در سه حالت ریشه‌ی مکرر دارد: $\Delta = 0$، عبارت به ازای $\sin x = 1$ صفر شود یا به ازای $\sin x = -1$ صفر شود. دو حالت آخر رخ نمی‌دهد، زیرا $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ و $0 < \sin x < 1$. بنابراین باید:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 3 + 4(a - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

B **۴۹- گزینه‌ی (۱)** جدول تغییرات تابع را در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} \cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0<x<2\pi} x_1 = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$$

پس طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع در این بازه‌ی $x = \frac{2\pi}{3}$ است.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

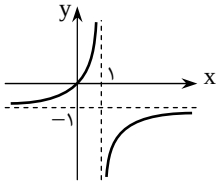
B **۵۰- گزینه‌ی(۳) راه اول:** از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{-\sin x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{(-\sin x + 1)^2} \xrightarrow[x\in[0,2\pi]]{f'(x)=0} x_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

پس نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $x = \frac{3\pi}{2}$ است و مقدار آن $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$. (دقت کنید که علامت $f'(x)$ همان علامت $\cos x$ است).

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

راه دوم: اگر قرار دهیم: $g(x) = \frac{x}{-x+1}$، داریم: $f(x) = g(\sin x)$. با توجه به نمودار تابع g، در محدوده‌ی $-1 \le x < 1$ (چون $-1 \le \sin x < 1$) می‌نیمم مطلق g در $x = -1$ رخ می‌دهد. این نقطه متناظر $x = \frac{3\pi}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برای تابع f است که چون تابع f در همسایگی آن تعریف شده، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی را مشخص می‌کند. پس مقدار این می‌نیمم برابر است با $g(-1) = \frac{-1}{2}$.



C **۵۱- گزینه‌ی (۴)** ریشه‌های مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f'(x) = -\sin(\frac{\pi}{x}) \times \frac{-\pi}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} \sin(\frac{\pi}{x}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{x} = k\pi \qquad k \in Z$$

$$\frac{1}{10} < x < 1 \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{x} < 10\pi \xrightarrow{\frac{\pi}{x}=k\pi} \frac{\pi}{x} \in \{2\pi, 3\pi, \cdots, 9\pi\} \rightarrow \text{۸ نقطه}$$

در ۸ نقطه‌ای که ذکر شده، داریم $f'(x) = 0$ و در همسایگی آن‌ها $\sin(\frac{\pi}{x})$ (یا معادلاً $f'(x)$) تغییر علامت می‌دهد، پس با یک اکسترمم نسبی مواجه‌ایم.

C **۵۲- گزینه‌ی (۲)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\xrightarrow{f'(x)=0}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0\le x\le 2\pi\Rightarrow 0\le 2x\le 4\pi\Rightarrow 2x\in\{\frac{\pi}{4},\pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},2\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\}\Rightarrow x_1+\cdots+x_4=\frac{1}{2}(\pi+2\pi+2\pi+\pi)=3\pi$$

در همسایگی هر یک از این نقاط علامت مشتق تغییر می‌کند، پس یک اکسترمم نسبی داریم.

B **۵۳- گزینه‌ی (۲)** برای آن‌که $x_0=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع باشد، باید در همسایگی آن علامت f' از مثبت به منفی تغییر کند. داریم: $f'(x)=\frac{-a\cos x}{\sin^2 x}$ و می‌دانیم در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ علامت $\cos x$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند. پس باید $a\le 0$ تا تغییرات علامت $f'(x)$ و $\cos x$ مانند یک‌دیگر شود (برای $a=0$ با یک تابع ثابت مواجه‌ایم که هر نقطه‌ی آن ماکزیمم نسبی است).

B **۵۴- گزینه‌ی (۱) راه اول:** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=-1-\cot^2 x-1-\tan^2 x=-(\tan^2 x+2+\frac{1}{\tan^2 x})=-(\tan x+\frac{1}{\tan x})^2$$

همواره $f'(x)<0$ (در دامنه‌ی آن)، و تابع f در بازه‌های پیوستگی آن نزولی اکید است. پس اکسترمم نسبی نداریم.

راه دوم: با ساده کردن ضابطه‌ی تابع داریم: $f(x)=\cot x-\tan x=\frac{1}{\tan x}-\tan x=\frac{1-\tan^2 x}{\tan x}=2\times\frac{1}{\tan 2x}=2\cot 2x$

با توجه به نمودار تابع که به سادگی قابل رسم است، اکسترمم نسبی نداریم.

C **۵۵- گزینه‌ی (۴)** دوره‌ی تناوب تابع 2π است. در یک دوره‌ی تناوب (مثلاً $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$) تابع یک مجانب قائم (در این مثال $x=\frac{3\pi}{2}$) دارد، بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است. حال با مشتق‌گیری داریم:

$$f'(x)=\cos x+1+\tan^2 x=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}$$

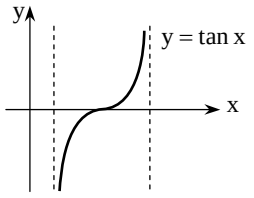
چون $\cos x\ge -1$، پس همواره $\cos^3 x+1\ge 0$، بنابراین همواره $f'(x)\ge 0$ و تابع در فاصله‌های پیوستگی خود صعودی اکید است و اکسترمم نسبی نداریم.

C **۵۶- گزینه‌ی (۱) راه اول:** با مشتق‌گیری داریم:

$$f'(x)=1+\tan^2 x-3(1+\cot^2 x)=\tan^2 x-2-3\cot^2 x=\frac{1}{\tan^2 x}(\tan^4 x-2\tan^2 x-3)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\tan^4 x-2\tan^2 x-3=0\Rightarrow(\tan^2 x-3)(\tan^2 x+1)=0\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{3}$$

در دو نقطه‌ی $x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ از گزینه‌ها داریم: $\tan x=-\sqrt{3}$ و $\tan x=\sqrt{3}$.



در همسایگی نقطه‌ی اول علامت $\tan^2 x-3=(\tan x-\sqrt{3})(\tan x+\sqrt{3})$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند (زیرا $\tan x-\sqrt{3}$ منفی است و به دلیل نمودار اکیداً صعودی $y=\tan x$ علامت $\tan x+\sqrt{3}$ از منفی به مثبت تغییر می‌کند). بنابراین با ماکزیمم نسبی تابع مواجه‌ایم. به همین ترتیب در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ با می‌نیمم نسبی تابع مواجه‌ایم.

راه دوم: وقتی $\tan x>0$ با قرار دادن $a=\tan x$، ضابطه‌ی تابع به صورت $a+\frac{3}{a}$ در می‌آید که طبق نامساوی واسطه‌ها: $a+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{3}$.

به همین ترتیب در حالتی که $\tan x<0$، با جایگذاری $a=-\tan x>0$، ضابطه‌ی تابع به صورت $-(a+\frac{3}{a})$ در می‌آید که این بار: $-(a+\frac{3}{a})\le -2\sqrt{3}$. به این ترتیب وقتی $\tan x<0$، تابع ماکزیمم نسبی برابر $-2\sqrt{3}$ دارد. این ماکزیمم نسبی وقتی حاصل می‌شود که:

$$a=\frac{3}{a}\Rightarrow\tan x=\frac{3}{\tan x}\Rightarrow\tan^2 x=3\xrightarrow{\tan x<0}\tan x=-\sqrt{3}\xrightarrow{\text{در گزینه‌ها}}x=\frac{2\pi}{3}$$

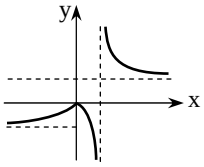
راه سوم: با توجه به آن‌که $f'(x)$ به ازای نقاطی که $\tan x=\pm\sqrt{3}$ برابر صفر می‌شود، برای تعیین وضعیت دقیق این نقاط از مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)+6\cot x(1+\cot^2 x)$$

برای $\tan x>0$ داریم: $f''(x)>0$ و برای $\tan x<0$: $f''(x)<0$ (زیرا مثلاً در حالت $\tan x<0$، $f''(x)$ از جمع دو عبارت منفی تشکیل شده است، چون $\cot x<0$). بنابراین وقتی $\tan x=-\sqrt{3}$، داریم $f'(x)=0$ و $f''(x)<0$ که نقطه‌ی ماکزیمم نسبی می‌شود.

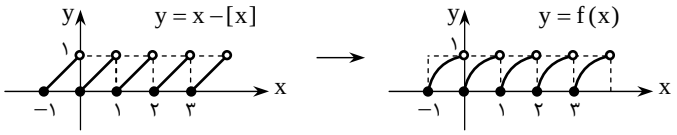
B **۵۷- گزینه‌ی (۱)** در همسایگی کوچک $x=0$ مخرج کسر ضابطه‌ی f منفی و صورت آن مثبت یا صفر است، پس در این همسایگی $f(x)\le 0$. چون $f(0)=0$، پس نقطه‌ی $x=0$، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع است. از طرفی برای $x>1$ داریم: $f(x)>0$، پس این نقطه ماکزیمم مطلق نیست.

تذکر: می‌توانید نمودار تابع را با ترکیب نمودارهای دو تابع $y_1=\frac{x}{x-1}$ (برای $x\ge 0$) و $y_2=\frac{-x}{x-1}$ (برای $x<0$) رسم کنید و به شکل مقابل برسید، که پاسخ درست از آن مشخص است.

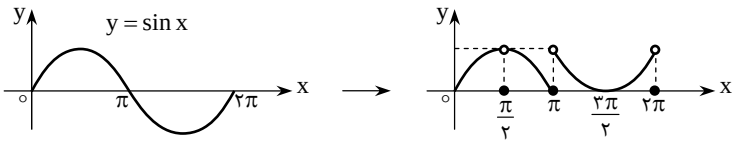


B **۵۸- گزینه‌ی (۴)** وضعیت اکسترمم‌های تابع f و تابع $g(x)=\frac{|x-1|}{x^2-4}$ در نقاط هم‌طول یکسان است، زیرا نمودار g از انتقال عمودی نمودار f حاصل می‌شود. می‌دانیم $g(1)=0$ و در همسایگی کوچک g داریم: $g(x)\le 0$ (زیرا مخرج کسر منفی و صورت آن مثبت است). بنابراین $x=1$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع g است. همچنین چون برای $x>2$ داریم: $g(x)>0$، نقطه‌ی $x=1$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق g نیست.

B **۵۹- گزینه‌ی(۱)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل در تمام نقاط با طول صحیح، تابع دارای می‌نیمم نسبی است. همگی این نقاط روی محور طول‌ها (یا همان خط $y=0$) هستند.



C **۶۰- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ می‌نیمم نسبی دارد.



B **۶۱- گزینه‌ی (۴)** تابع f در همسایگی $x=1$ تعریف شده است. همچنین داریم: $f(1)=0$ و برای بقیه‌ی نقاط $f(x)\ge 0$. زیرا:

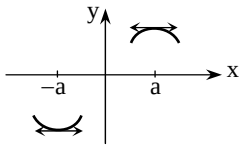
اگر $x\ge 0 \xrightarrow{|x-1|\ge 0} x|x-1|\ge 0 \Rightarrow f(x)\ge 0$

اگر $x<0: \sqrt{-x(x^2+1)}>0 \Rightarrow f(x)\ge 0$

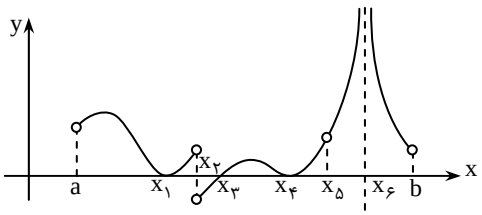
پس در $x=1$ با می‌نیمم نسبی و مطلق f مواجه‌ایم.

D **۶۲- گزینه‌ی (۴)** در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $f(x)=0$، که نه ماکزیمم مطلق است و نه می‌نیمم مطلق، زیرا $\sin x$ می‌تواند هم مقادیر مثبت بگیرد و هم مقادیر منفی. اما در همسایگی کوچک $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $\sin x>0$ (در واقع $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$)، پس برای مقادیر گویا در همسایگی کوچک $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $f(x)>0$ و برای مقادیر گنگ: $f(x)=0$. یعنی $f(x)\ge 0$ و با می‌نیمم نسبی تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ مواجه‌ایم.

C **۶۳- گزینه‌ی (۲)** نمودار تابع فرد f نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. بنابراین اگر $x=a$ ماکزیمم نسبی آن باشد، مانند شکل $x=-a$ می‌نیمم نسبی آن خواهد بود. بنابراین از فرض نتیجه می‌گیریم تابع f در بازه‌ی $(-\infty,0)$ دارای ۳ ماکزیمم نسبی و ۴ می‌نیمم نسبی است. در نتیجه روی هم در R، $4+3=7$ می‌نیمم نسبی و ۷ ماکزیمم نسبی دارد.

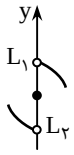


A **۶۴- گزینه‌ی (۲)** در بازه‌ی (a,b) ۶ نقطه‌ی بحرانی داریم. در نقاط $x=x_2$ و $x=x_3$ علامت مشتق در همسایگی نقطه تغییر می‌کند. بنابراین با اکسترمم نسبی تابع f مواجه‌ایم.



A **۶۵- گزینه‌ی (۳)** با توجه به آن‌که $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$، در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ نمودار تابع به شکل است و با نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم. همچنین از شرط $f(a)=0$ نتیجه می‌گیریم این نقطه روی محور xها قرار دارد.

B **۶۶- گزینه‌ی(۳)** چون $\lim\limits_{x\to a^-}f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ دو عدد حقیقی متفاوت می‌شوند با یک نقطه‌ی زاویه‌دار مواجه‌ایم. از طرفی علامت مشتق در همسایگی این نقطه از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.



D **۶۷- گزینه‌ی (۴)** دقت کنید که طبق نتایج برآمده از قضیه‌ی «مقدار میانگین درباره‌ی مشتق» وقتی f در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$، آن‌گاه $f'_+(a)=L$. بنابراین اگر در همسایگی نقطه‌ی صفر دو مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ را L_2 و L_1 بنامیم (مطابق شکل)، در این صورت: $f'_+(0)=L_1$ و $f'_-(0)=L_2$. چون $L_1\neq L_2$ تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و نمی‌تواند نقطه‌ی توپر روی $x=0$ وجود داشته باشد.

C **۶۸- گزینه‌ی (۲)** چون $h(2)=-1$ و تابع h در $x=2$ پیوسته است، پس در همسایگی کوچک $x=2$ داریم: $h(x)<0$. بنابراین علامت f' مخالف علامت $2-x$ می‌شود و جدول مقابل به دست می‌آید. طبق جدول در $x=2$ با ماکزیمم نسبی تابع f مواجه‌ایم.

x		۲	
$2-x$	−	۰	+
$f'(x)$	+	۰	−
$f(x)$	↗		↘

C **۶۹- گزینه‌ی(۴)** طبق قضیه‌های کتاب درسی در بخش «قضیه‌ی مقدار میانگین درباره‌ی مشتق»، از فرض‌های گزینه‌ی (۴) نتیجه می‌گیریم $f'(c)$ نیز وجود دارد و برابر L است. بقیه‌ی گزینه‌ها بیانگر قضیه‌هایی درست از متن درس‌اند.

۷۰- گزینه‌ی(۴) ریشه‌های مشتق را می‌یابیم:

$$f(x)=\cos^2 x-\cos x \Rightarrow f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(-2\cos x+1)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\xrightarrow{\text{در بازه‌ی مورد نظر}}x_1=\pi\ ,\ x_2=2\pi\\ \cos x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{در بازه‌ی مورد نظر}}x_3=\frac{5\pi}{3}\ ,\ x_4=\frac{7\pi}{3}\end{cases}$$

حال جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم. طبق این جدول با دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی در این بازه مواجه‌ایم.

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π		$\frac{7\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{2}$
f'		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	
f		↗	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	

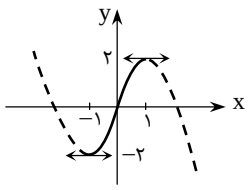
تذکر: با توجه به آن‌که مطمئن‌ایم علامت f' در همسایگی هر کدام از ریشه‌های آن تغییر می‌کند (زیرا همگی ریشه‌های ساده‌ی f هستند)، می‌توانیم بدون تشکیل جدول تغییرات بگوییم ۴ اکسترمم نسبی داریم و این شرایط تنها در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

B **۷۱- گزینه‌ی(۳) راه اول:** تابع f پیوسته است، بنابراین در بازه‌ی بسته‌ی $[-1,1]$ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق دارد و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. در محدوده‌ی $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ داریم: $x^2-3<0$، بنابراین در دامنه‌ی $[-1,1]$ داریم:

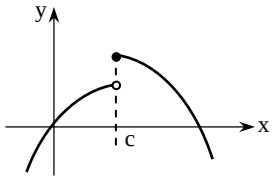
$$f(x)=x(3-x^2)=-x^3+3x\Rightarrow f'(x)=-3x^2+3\xrightarrow{f'(x)=0}x=\pm1$$

نقاط $x=\pm1$، نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند، اگر همسایگی آن‌ها جزء دامنه‌ی تابع f باشد. بنابراین تابع f با دامنه‌ی $[-1,1]$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی ندارد.

راه دوم: با توجه به آن‌که در محدوده‌ی $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ داریم: $x^2-3<0$، در دامنه‌ی $[-1,1]$ داریم: $f(x)=-(x^3-3x)$. نمودار تابع مانند شکل روبه‌رو می‌شود که اکسترمم نسبی ندارد.



A **۷۲- گزینه‌ی(۴)** با توجه به شکل روبه‌رو هر سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینه‌ی (۴) درست است، زیرا با توجه به تعریف شده بودن f در همسایگی نقطه‌ی $x=c$، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



B **۷۳- گزینه‌ی (۲)** نقطه‌ی $(1,-2)$ روی نمودار تابع است، پس $f(1)=-2$، درنتیجه $a+b=-2$. همچنین داریم:

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx\xrightarrow{f'(1)=0}-a+2b=0\xrightarrow{a+b=-2}3b=-2\Rightarrow b=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=-\frac{4}{3}$$

برای تعیین نوع اکسترمم از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم. داریم: $f''(x)=\frac{2a}{x^3}+2b$، بنابراین $f''(1)<0$ (چون a و b هر دو منفی‌اند)، پس نقطه‌ی $(1,-2)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

A **۷۴- گزینه‌ی (۳)** عبارات گزینه‌ی (۲) و (۴) قضیه‌هایی هستند که در بخش آموزش بیان شده‌اند. همچنین می‌دانیم اگر $f'(x)$ در نقطه‌ی اکسترمم نسبی c موجود باشد، داریم $f'(c)=0$، پس گزینه‌ی (۱) نیز عبارتی درست است. گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x)=x^3$.

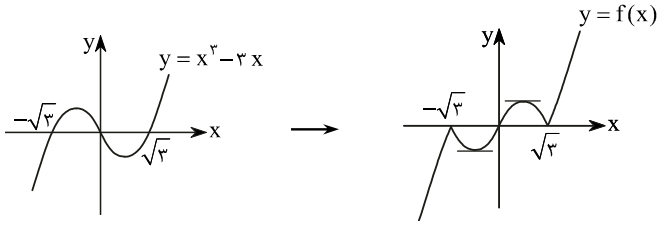
B **۷۵- گزینه‌ی (۳)** مشتق تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x=2\sin x(-2\cos x+1)\xrightarrow[x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]{f'(x)=0} x_1=0\ ,\ x_2=-\frac{\pi}{3}\ ,\ x_3=\frac{\pi}{3}$$

با توجه به جدول تغییرات، تابع، دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزمم نسبی دارد.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	!	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	!
$f(x)$	!	↘	min	↗	max	↘	min	↗	!

B **۷۶- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. اگر $g(x)=x^3-3x$، آن‌گاه $f(x)=\begin{cases} g(x) & |x|\geq\sqrt{3} \\ -g(x) & |x|<\sqrt{3}\end{cases}$، بنابراین پس از رسم نمودار تابع g، کافی است بخشی از نمودار را که در محدوده‌ی $|x|\leq\sqrt{3}$ قرار می‌گیرد، نسبت به محور xها قرینه کنیم.



با توجه به نمودار، تابع f دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد.

B **۷۷- گزینه‌ی (۴)** مشتق تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}\xrightarrow{f'(x)=0} x_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x=0$ جزء دامنه‌ی تابع نیست و تنها باید $x=x_0$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همه‌ی مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_0$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است و تابع هیچ‌گاه ماکزیمم نسبی ندارد.

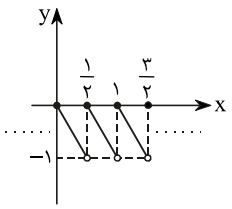
C **۷۸- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{3\sin x+1}{4\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3-4}{(4\sin x+1)^2}\times\cos x\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(4\sin x+1)^2}\times\cos x$$

بنابراین علامت f' مخالف علامت $\cos x$ است. در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$، علامت $\cos x$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند، بنابراین علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند. پس $x=\frac{\pi}{2}$ طول نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است.

A **۷۹- گزینه‌ی (۱)** در نمودار گزینه‌ی (۱) علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

A **۸۰- گزینه‌ی(۴)** در نقاطی که $2x\in Z$ داریم $y=0$ و در نقاط دیگر $-1<y<0$. بنابراین نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود. طبق نمودار هر $x=\frac{k}{2}\ (k\in Z)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع است، ولی نقطه‌ی می‌نیمم نسبی نداریم.



سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR